PELABELAN HARMONIS GENAP SEJATI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD KALIS SETIONO
NIM. 17610104

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

PELABELAN HARMONIS GENAP SEJATI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
MUHAMMAD KALIS SETIONO
NIM.17610104

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

PELABELAN HARMONIS GENAP SEJATI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
MUHAMMAD KALIS SETIONO
NIM.17610104

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 7 Mei 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19630502 198703 1 005	NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PELABELAN HARMONIS GENAP SEJATI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
MUHAMMAD KALIS SETIONO
NIM.17610104

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 3 Juni 2021

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Juhari M, Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Kalis Setiono

NIM : 17610104

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Pelabelan Harmonis Genap Sejati pada Graf Petersen Diperumum

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil dari tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 Mei 2021
Yang membuat pernyataan,

Muhammad Kalis Setiono
NIM. 17610104

MOTO

Sayyidina Ali Bin Abi Thalib

“Kesabaran itu ada dua macam: sabar atas sesuatu yang tidak kau inginkan dan sabar menahan diri dari sesuatu yang kau inginkan”.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta dan tersayang Ayahanda Lasiman (Alm) dan Ibu Sukarti yang selalu menyelipkan nama penulis dalam setiap do’a sehingga menjadi motivasi penulis dalam setiap langkah untuk menggapai mimpi. Adik terkasih Devita Putri Salamah yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamualikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT Tuhan semesta Alam atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Pelabelan Harmonis Genap Sejati Pada Graf Petersen Diperumum” sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi agung Muhammad SAW yang membawa umat ini dari jalan kegelapan menuju jalan terang benderang yaitu agama Islam.

Pada penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak arahan, nasihat dan pandangan, serta ilmu untuk menjadi pengalaman yang berharga bagi penulis.

5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II sekaligus sebagai dosen wali yang selalu memotivasi dan memberikan arahan, nasihat, dan ilmu yang berarti kepada penulis.
6. Evawati Alisah, M.Pd, selaku penguji utama yang berkenan memberikan saran, nasihat, dan ilmu yang berarti kepada penulis.
7. Juhari, M.Si, selaku ketua penguji yang berkenan memberikan saran, nasihat, dan ilmu yang berarti kepada penulis.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada penulis dan pembaca.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 7 Mei 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Setiono, Muhammad Kalis. 2021. **Pelabelan Harmonis Genap Sejati pada Graf Petersen Diperumum.** Skripsi. Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd**.** (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Pelabelan Harmonis Genap Sejati, Graf Petersen Diperumum**.**

Pelabelan graf telah mengalami banyak perkembangan sehingga dikenal berbagai metode yang biasa digunakan, salah satunya adalah pelabelan harmonis genap sejati. Pelabelan ini merupakan variasi dari pelabelan harmonis yang muncul pertama kali oleh Graham dan Sloane selama pembelajaran mengenai versi modular dari masalah basis aditif yang berasal dari *error-correcting code*. Penelitian ini membahas pelabelan harmonis genap sejati dan penentuan rumus umum pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum**.** Penelitian ini dimulai dengan tahapan penotasian titik dan sisi, pelabelan titik dan sisi, lalu menentukan pola yang sesuai dan menghasilkan suatu rumus umum, serta pembuktian rumus umum. Hasil dari penelitian ini terbukti bahwa graf Petersen diperumum dengan n ganil dan $n \geq 3$ adalah graf harmonis genap sejati karena dapat dilabeli dengan aturan pelabelan harmonis genap sejati.

ABSTRACT

Setiono, Muhammad Kalis. 2021. **Properly Even Harmonious Labeling on Generalized Petersen Graph.** Thesis. Mathematics Department. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor (I) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Key words: Properly Even Harmonious Labeling, Generalized Petersen Graph.

Graph labeling has undergone many developments so that there are known various methods commonly used, one of its method is properly even harmonious labeling. This labeling is a variation of harmonious labeling that arises firstly from Graham and Sloane during their study of modular versions of additive bases problems stemming from error-correcting codes. This research discusses about properly even harmonious labeling and determination the general formula of properly even harmonious labeling on generalized Petersen graph. This research begins with the vertices and edges notation, labeling the vertices and the edges, then determining the appropriate pattern and producing a general formula, and proving the general formula. The result of this study is that the generalized Petersen graph $GP_{n,1}$ with n is odd and $n \geq 3$ is properly even harmonious graph because it can be labeled with properly even harmonious labeling.

الملخص

سيتيونو ، محمدكالس. 2021. تصنيف التوافقيات الشعفية الصحيحة على رسوم بيترسن البيانية المعممة.. البحث اجامعي. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. تحت المشرف الأول (١) الدكتور إمام سوجر لمشرف الثاني (٢) محمد نافع جوهري الماجستير

الكلمات الرئيسية: تصنيف التوافقيات الشعفية الصحيحة ورسوم بيترسن البيانية المعممة

يتطور تصنيف الرسم البياني كثيرا عن الطرق المختلفة يمكن استخدامها، ومنها تصنيف التوافقيات الشعفية الصحيحة. وظهر هذا التصنيف أول مرة لدى Grahamو Sloane أثناء دراستهم للنسخة المعيارية لمشكلة الأساس المضافة المشتقة من أكواد تصحيح الأخطاء.

هذا البحث يتكون من مراحل تدوين النقاط والحواف وتعيين النقاط والحواف ثم تحديد النمط المناسب وإنتاج صيغة عامة ، وكذلك إثبات أن الصيغة الناتجة مناسبة ومثبتة. وتدل نتائج البحث على أن ورسوم بيترسن البيانية المعممة على عدد n فردي وأن $n \geq 3$ هو رسم البياني التوافقي الشفعي الحقيقي لأنه يمكن تصنيفه بقواعد تصنيف الرسم بياني التوافقي الشفعي الحقيقي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu permasalahan utama dalam teori graf adalah pelabelan graf. Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan pada suatu graf muncul pertama kali dari karya Rosa pada tahun 1967 dan terus mengalami perkembangan dengan adanya penemuan graf tertentu dengan pelabelan tertentu, sehingga dikenal berbagai pelabelan graf antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmonis, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Perkembangan pelabelan graf juga dapat dijumpai pada pengaplikasiannya di berbagai bidang diantaranya dekomposisi graf, kriptografi, teori koding, radar, desain jaringan komunikasi, dll.

Pada tahun 1980, Graham dan Sloane memperkenalkan pelabelan harmonis selama pembelajaran mereka mengenai versi modular dari masalah basis aditif yang berasal dari *error-correcting code*. Pelabelan harmonis memiliki beberapa aplikasi, salah satunya untuk pembagian saluran radio. Misalkan tersedia sebanyak q saluran frekuensi, titik-titik pada graf merepresentasikan stasiun komunikasi dan sisi pada graf tersebut merepresentasikan jalur komunikasi dari satu stasiun ke stasiun yang lain. Dengan memberikan label berbeda pada setiap stasiun, setiap jalur komunikasi dapat memperoleh saluran frekuensi dengan menjumlahkan label dua stasiun yang berkomunikasi yang menghasilkan label berbeda (Graham dan Sloane, 1980).

Dalam pengembangan pelabelan harmonis dikenal juga pelabelan harmonis ganjil dan pelabelan harmonis genap. Kemudian pelabelan harmonis genap terus berkembang dan memiliki variasi salah satunya adalah pelabelan harmonis genap sejati. Di mana variasi ini hanya dimiliki oleh pelabelan harmonis genap dan tidak ada di pelabelan harmonis ganjil. Suatu fungsi f disebut pelabelan harmonis genap sejati (*properly even harmonious labeling*) dari suatu graf $G(V,E)$ dengan q sisi jika $f: V \rightarrow \{0,1,2,\cdots,2q-1\}$ adalah fungsi injektif dan fungsi $f*: E \rightarrow \{\,0,2,4,\cdots,2(q-1)\}$ dengan $f*(xy) = \big(f(x)+f(y)\big)(mod\ 2q)$ adalah fungsi bijektif (Gallian dan Stewart 2015).

Pengakajian dari pelabelan harmonis genap sejati tidak lepas dari kajian tentang pelabelan harmonis yang dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang lain. Hal ini sejalan dengan firman Allah yang tertuang dalam surah al-Jatsiyah (45) ayat 49 berikut:

"Dan Dia telah menundukkan untuk kamu apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi, semuanya dari-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat ayat-ayat bagi kaum yang berpikir."

Makna dari ayat tersebut adalah dan Dia yang Maha Esa dan Kuasa itu juga yang telah menundukkan untuk kemaslahatan kamu apa yang ada di langit seperti bintang-bintang dan planet-planet serta apa yang ada di bumi seperti tanah yang subur, udara, air, atau lain-lain. Semuanya itu sebagai rahmat yang bersumber dari-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat ayat-ayat yakni tanda-tanda dan bukti-bukti yang sangat jelas tentang keesaan serta kekuasaan Allah bagi kaum yang mau berpikir merenungkan ayat-ayat ini.

Penundukkan langit dan bumi dipahami dalam arti semua bagian-bagian alam yang terjangkau dan berjalan atas dasar satu sistem yang pasti, saling berkaitan dan konsisten. Allah menetapkan hal tersbut dan dari saat ke saat mengilhami manusia tentang pengetahuan fenomena alam yang dapat mereka manfaatkan untuk kemaslahatan dan kenyamanan hidup manusia. Sehingga semua yang Allah tundukkan kepada manusia baik yang ada di langit maupun di bumi, masing-masing memiliki manfaat yang banyak di berbagai bidang kehidupan manusia.

Graf Petersen diperumum atau dinotasikan dengan $GP_{n,k}$ dengan $n \geq 3, n$ adalah bilangan positif dan $1 \leq k \leq \left|\frac{n-1}{2}\right|$ adalah graf dengan $2n$ titik. Graf tersebut dikenal juga sebagai graf beraturan dan termasuk pada graf kubik atau graf yang berderajat tiga. Menurut (Holton dan Sheehan, 1993) Graf Petersen diperumum menarik untuk dikaji karena graf ini memiliki bermacam-macam graf di dalamnya, salah satunya adalah graf petersen. Graf Petersen sangat popular untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal maupun mempunyai sifat-sifat menarik salah satunya adalah graf Petersen sebagai bukti bahwa tidak semua graf kubik terfaktor-1.

Penelitian graf Petersen diperumum pernah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya seperti Willy Yandi Wijaya pada tahun 2011 mengkaji tentang graf Petersen dan beberapa sifat-sifat yang berkaitan dengan teori graf, penelitian Imam Danarto pada tahun 2012 mengkaji sifat hamiltonian dan hipohamiltonian pada graf Petersen diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$). Pengkajian mengenai graf Petersen diperumum terus digemari oleh peneliti lain seperti Moch. Ryan Afif Aminulloh pada tahun 2019 mengkaji tentang minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf petersen $P(n, 1)$.

Penelitian terkait pelabelan harmonis genap sejati pernah diteliti oleh beberapa peneliti sebelumnya. Penelitian yang dilakukan oleh Joseph A. Gallian dan Danielle Stewart pada tahun 2015 meneliti tentang pelabelan harmonis genap sejati pada graf tak terhubung. Penelitian yang dilakukan oleh Olive Mbianda memfokuskan pelabelan harmonis genap sejati pada gabungan graf path, gabungan graf path dan graf stars, dan gabungan graf path dan graf cycles. Serta Sarah Zahidah pada tahun 2017 yang menerapkan pelabelan harmonis genap sejati pada graf path dan graf yang memuat dua atau tiga carterpillar.

Berdasarkan penelitian tersebut maka penelitian tentang pelabelan harmonis genap sejati dapat dikembangkan dan diterapkan pada graf yang lain. Dengan demikian untuk membedakan dengan penelitian terdahulu, peneliti akan melakukan penelitian pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah:

1.) Bagaimana pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$?.
2.) Bagaimana rumus umum untuk pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$?.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1.) Untuk mengetahui pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$.
2.) Untuk mengetahui rumus umum untuk pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penulis mengharapkan penelitian ini bermanfaat kepada :

1.) Menambah wawasan mengenai pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$.
2.) Dengan mengetahui rumus umum untuk pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$, maka dapat dijadikan refrensi atau rujukan untuk dikembangkan ke penelitian jenis graf yang lain atau menggunakan metode pelabelan graf yang lain.

1.5 Batasan Masalah

Permasalahan ini dibatasi pada pembahasan mengenai pelabelan harmonis genap pada graf Petersen diperumum $GP(n, 1)$ dengan n ganil dan $n \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan metode studi pustaka, yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data-data maupun informasi dengan bantuan berbagai macam material seperti buku, catatan, dokumen, jurnal, artikel, dan sebagainya yang berkaitan dengan pembahasan.

Pola pembahasan pada penelitian ini dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu perumuman yang bersifat umum (deduktif). Untuk rumusan masalah pertama penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1.) Memberikan penotasian titik dan sisi pada graf Petersen diperumum yang diberikan.

2.) Memetakan notasi titik dan sisi dari graf Petersen diperumum pada bilangan bulat tak negatif sesuai dengan aturan pelabelan harmonis genap sejati.

3.) Melabeli setiap titik dan sisi pada graf Petersen diperumum dengan bilangan tak negatif yang sudah diperoleh melalui aturan pelabelan harmonis genap sejati.

4.) Membuat konjektur (dugaan awal) berupa rumus berdasarkan pola yang ditemukan dari pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum.

5.) Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.

Untuk rumusan masalah kedua penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1.) Membuat tabulasi pola pelabelan titik dan sisi graf Petersen diperumum.

2.) Menentukan rumus umum yang sesuai dari pola yang ditemukan.

3.) Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penelitian ini terbagi dalam empat bab dan di setiap bab terdapat sub-bab. Sistematika ini dibuat untuk menjadi acuan bagi penulis agar lebih sistematis dan mudah dipahami. Sistematika tersebut yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan terdiri atas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian Pustaka berisi tentang teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti. Teori-teori tersebut meliputi himpunan, relasi, fungsi, teori graf, pelabelan harmonis genap sejati, graf Petersen, dan graf Petersen diperumum.

Bab III Pembahasan

Pembahasan ini berisikan hasil penelitian tentang pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum.

Bab IV Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil penelitian yaitu pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum serta kritik dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

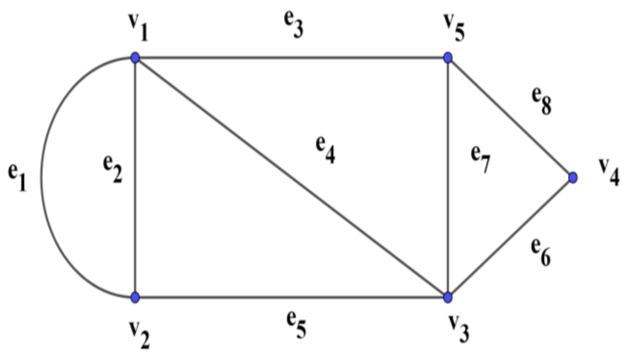
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan size dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Berikut diperlihatkan graf G_1 seperti pada gambar 2.5



Gambar 2.1 Graf G_1

Berdasarkan gambar 2.5, maka graf G_1 mempunyai 5 titik sehingga order graf G_1 adalah $p = 5$. Graf G_1 mempunyai 8 sisi sehingga ukuran graf G_1 adalah $q = 8$ dengan:

$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_2, v_1v_5, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$

Dapat ditulis dengan

$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

untuk

$e_1 = v_1v_2$	$e_5 = v_2v_3$
$e_2 = v_1v_2$	$e_6 = v_3v_4$
$e_3 = v_1v_5$	$e_7 = v_3v_5$
$e_3 = v_1v_3$	$e_8 = v_4v_5$

2.2 Adjacent dan Incident

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incidenti*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartand dan Lesniak, 1986:4). Pada graf G_1 seperti diketahui pada gambar 2.5 tersebut, $e_3 = v_1v_5 \in E(G)$, maka simpul v_1 dan simpul v_5 dikatakan *adjacent* di G_1 dan sisi e_3 dikatakan *incident* dengan simpul v_1 dan simpul v_5.

2.3 Derajat Titik

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartand dan Lesniak, 1986:7). Pada graf G_1 seperti diketahui pada gambar 2.5 tersebut, $\deg(v_1) = 4$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 2$, $\deg v_5 = 3$.

2.4 Graf Beraturan – r

Graf beraturan-r adalah graf yang semua titiknya berderajat r, atau $\deg(v) = r$ (Chartand dan Lesniak, 1986:9).

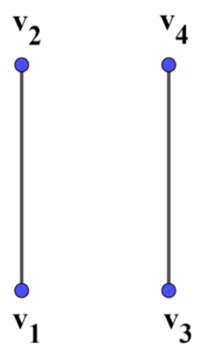
Contoh:

Selanjutnya akan diperlihatkan graf G_5 yang memuat himpunan titik $V(G_5)$ dan himpunan sisi $E(G_5)$.

$V(G_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G_5) = \{v_1v_2, v_3v_4\}$

Graf G_5 tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.2 Graf G_2

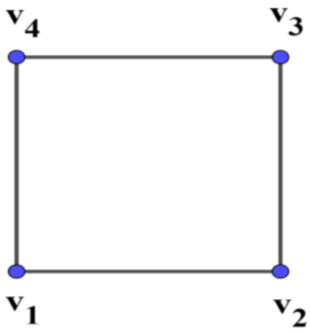
Berdasarkan gambar 2.9 maka dapat diketahui bahwa graf G_5 merupakan graf beraturan-1 karena derajat setiap titiknya adalah 1.

Selanjutnya akan diperlihatkan graf G_6 yang memuat himpunan titik $V(G_6)$ dan himpunan sisi $E(G_6)$.

$V(G_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G_6) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$

Graf G_6 tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf G_3

Berdasarkan gambar 2.10 maka dapat diketahui bahwa graf G_6 merupakan graf beraturan-2 karena derajat setiap titiknya adalah 2.

2.5 Graf Petersen

Graf Petersen $P_{n,k}$ adalah graf dengan $2n$ titik $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan sisi $u_i \to u_{i+1}, v_i \to v_{i+k}$ dan $u_i \to v_i$ (Asmiati, 2016).

Contoh:

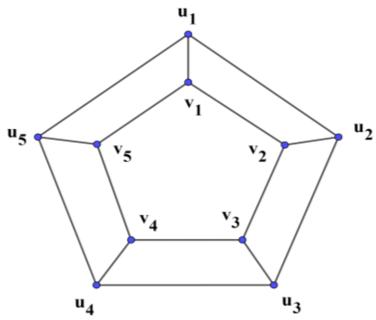
Berikut akan diperlihatkan graf $P_{5,1}$ yang memuat himpunan titik $V(P_{5,1})$ dan himpunan sisi $E(P_{5,1})$.

$V(P_{5,1}) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(P_{5,1}) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, u_1v_1, u_2v_2,$

$u_3v_3, u_4v_4\ , u_5v_5\}$

Graf $P_{5,1}$ tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf $P_{5,1}$

2.6 Graf Petersen yang Diperumum

Graf Petersen diperumum dinotasikan $GP_{n,k}$, untuk bilangan positif n dan k dengan $1 \leq k < n$, adalah graf dengan himpunan titik $V(GP_{n,k}) = \{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ dan himpunan sisi $E(GP_{n,k}) = \{u_iu_{(i+1)}, v_iv_{(i+\mathrm{k})}, u_iv_i \middle| i = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, dimana penambahan di dalam indeks $(i+1), (i+k)$ adalah modulo n (Potanka, 1998:32).

Pada penelitian Imam Danarto (2012:22) dikatakan Graf Petersen $GP_{n,k}$ mempunyai tiga macam *edge* (sisi) yaitu *outer edge*, *inner edge*, dan *spoke*. *Outer edge* menghubungkan titik u_i dan u_{i+1}. *Inner edge* menghubungkan titik v_i dan v_{i+k}. Sedangkan *spoke* menghubungkan titik u_i dan v_i. Salah satu graf Petersen diperumum yang terkenal adalah $GP_{5,2}$ atau yang sering disebut graf Petersen.

Contoh:

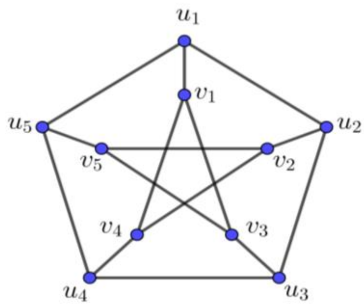
Berikut akan diperlihatkan graf $GP_{5,2}$ yang memuat himpunan titik $V(GP_{5,2})$ dan himpunan sisi $E(GP_{5,2})$.

$V(GP_{5,2}) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(GP_{5,2}) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5, u_1v_1,$

$u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5\}$

Graf $GP_{5,2}$ tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf $GP_{5,2}$

2.7 Pelabelan

Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat non-negatif atau positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan sisi (sehingga pelabelan ini disebut pelabelan total) (Nurdin, baskoro, dan Salman, 2005:1).

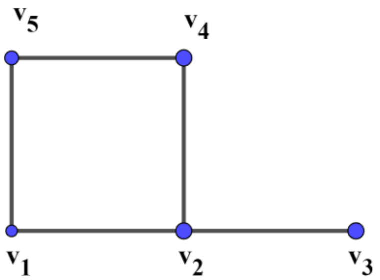
Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*) (Miller, 2000:165).

2.8 Pelabelan Harmonis Genap Sejati

Suatu fungsi f disebut pelabelan Harmonis Genap Sejati (*properly Even harmonious labeling*) dari suatu Graf $G(V,E)$ dengan q sisi jika $f : V \rightarrow \{0,1,2,\cdots,2q-1\}$ adalah fungsi injektif dan fungsi $f*: E \rightarrow \{\,0,2,4,\cdots,2(q-1)\}$ dengan $f*(xy) = (f(x) + f(y))(mod\ 2q)$ adalah fungsi bijektif (Gallian dan Stewart 2015).

Contoh:

Berikut ini akan diberikan contoh pelabelan harmonis genap sejati pada graf G_7 seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.6 Graf G_7

Diketahui graf G_7 dengan $V(G_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G_7) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$, sehingga dapat diketahui bahwa order dari G_7 adalah $p = 5$ dan ukuran dari G_7 adala $q = 5$. Didefinisikan fungsi $f : V(G_7) \rightarrow \{0,1,2,3,\cdots,9\}$ dengan:

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 2$

$f(v_3) = 4$

$f(v_4) = 6$

$f(v_5) = 8$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(G_7)$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(G_7)$) memiliki label yang berbeda. Kemudian, didefinisikan fungsi $f *: E(G_7) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 8\}$ dengan ketentuan $* (uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 10)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f * (v_1v_2) = \big(f(v_1) + f(v_2)\big)(mod\ 10) = (0 + 2)(mod\ 10) = 2$

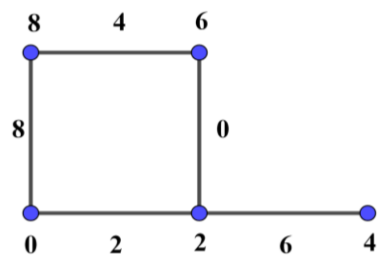
$f * (v_2v_3) = \big(f(v_2) + f(v_3)\big)(mod\ 10) = (2 + 4)(mod\ 10) = 6$

$f * (v_2v_4) = \big(f(v_2) + f(v_4)\big)(mod\ 10) = (4 + 6)(mod\ 10) = 0$

$f * (v_4v_5) = \big(f(v_4) + f(v_5)\big)(mod\ 10) = (6 + 8)(mod\ 10) = 4$

$f * (v_1v_5) = \big(f(v_1) + f(v_5)\big)(mod\ 10) = (8 + 0)(mod\ 10) = 8$

Fungsi $f *$ merupakan fungsi injektif karena setiap anggota $E(G_7)$ memiliki label yang berbeda dan $f *$ juga merupakan fungsi surjektif karena $f * \big(E(G_7)\big) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, maka $f *$ adalah fungsi bijektif. Berdasarkan definisi pelabelan harmonis genap sejati, maka pelabelan pada graf G_7 di atas adalah pelabelan harmonis genap sejati dengan hasil pelabelan seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.7 Pelabelan harmonis genap sejati pada graf G_7.

2.9 Kajian Keislaman Tentang Pelabelan Graf

Segala sesuatu yang Allah ciptakan mempunyai banyak manfaat untuk diambil pelajaran, termasuk dalam penciptaan air hujan. Allah telah berfirman dalam Al-Qur'an surat Qaf surat ke-50 ayat 9:

"Dan Kami menurunkan dari langit air yang banyak manfaatnya lalu Kami tumbuhkan dengannya kebun-kebun dan biji-biji tanaman yang dituai."

Ayat Al-Qur'an tersebut menjelaskan tentang pemaparan bukti-bukti kuasa Allah swt. Kali ini yang diuraikan adalah beberapa dampak yang diperoleh dari penciptaan langit dan bumi. Dampak pertama yang disebutkan adalah apa yang dihasilkan bersama oleh langit dan bumi yakni air hujan yang bersumber dari laut dan sungai yang terhampar di bumi, lalu air tersebut menguap ke angkasa akibat panas yang memancar dari matahari yang berada di langit. Di sini Allah menyebutkan karunia-Nya kepada makhluk-makhluk-Nya dengan menurunkan air yang merupakan sumber kehidupan mereka di pentas bumi ini. Allah berfirman: Dan di antara bukti kuasa Kami adalah Kami menurunkan sedikit demi sedikit dan sesuai dengan kebutuhan dari langit yakni angkasa, air hujan yang banyak manfaatnya bagi penghuni bumi lalu Kami tumbuhkan dengannya yakni dengan air yang tercurah itu aneka tumbuhan, bunga-bungaan juga buah-buahan yang tumbuh di kebun-kebun dan biji-biji tanaman yang dituai.

Interpretasi dari ayat terebut adalah Allah menjadikan air sebagi sumber kehidupan bagi makhluk-makhluk-Nya. Baik makhluk-makhluk Allah berupa benda hidup maupun benda tak hidup tentu membutuhkan air untuk mempertahankan hidup. Dalam penurunan air ke bumi, Allah tidak lekas menariknya kembali melainkan dapat ditampung di sungai, danau, maupun laut. Dengan demikian bumi kita yang terdiri dari dua pertiga perairan mempunyai cadangan atau simpanan air yang berlimpah untuk dimanfaat oleh makhluk-makhluk-Nya. Manusia dapat minum dan bekerja, tanah menjadi subur, hewan tidak kehausan, dan tumbuh-tumbuhan tumbuh subur untuk buahnya dapat dipanen oleh manusia. Bisa dipikirkan jika Allah menghendaki tanah untuk menyerap semua air yang ada di bumi, tentu semua makhluk yang ada di bumi mengalami kekeringan. Dari yang demikian itu terdapat pembelajaran yang Allah berikan untuk orang-orang yang berpikir yaitu tentang proses turunnya hujan. Karenanya sebagai seorang matematikawan hendaknya mengambil pembelajaran dari nikmat yang Allah turunkan berupa air baik dari aspek proses air diturunkan, kandungan yang ada pada air, dan manfaat atau peranan dari air. Untuk mempelajari hal tersebut maka dibutuhkan bidang ilmu-ilmu lain sehhingga dapat diterapkan pada kajian ilmu yang bersangkutan. Oleh sebab itu, penelitian mengenai pelabelan harmonis genap sejati yang tidak lepas dari kajian tentang pelabelan harmonis sejalan dengan ayat Al-Qur’an surah Qaf surat ke-50 ayat 9, di mana pelabelan harmonis dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang keilmuan lain seperti bidang teori koding dalam masalah *error-correcting code* dan jaringan komunikasi pada pembagian saluran radio.

BAB III

PEMBAHASAN

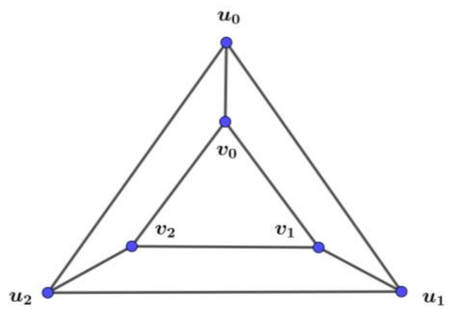
3.1 Pelabelan Harmonis Genap Sejati pada Graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$

Pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ untuk n ganjil (nilai n yang diambil dalam pembahasan ini adalah $3 \leq n \leq 11$) adalah sebagai berikut:

3.1.1 Graf Petersen Diperumum $GP_{3,1}$

Langkah I

Diberikan graf Petersen diperumum $GP_{3,1}$ seperti pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Penotasian titik dan sisi $GP_{3,1}$

Sehingga dari langkah pertama ini kita peroleh graf Petersen diperumum $GP_{3,1}$ memiliki himpunan titik $V(GP_{3,1})$ dan himpunan sisi $E(GP_{3,1})$:

$$V(GP_{3,1}) = \{ u_0, u_1, u_2,$$
$$v_0, v_1, v_2\}$$

$$E(GP_{3,1}) = \{u_0u_1, u_1u_2, u_2u_0,$$
$$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0,$$
$$u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2\}$$

Sehingga dapat diketahui bahwa order atau banyaknya titik dari $GP_{3,1}$ adalah $p = 6$ dan ukuran atau banyaknya sisi dari $GP_{3,1}$ adalah $q = 9$.

Langkah II

Didefinisikan fungsi $f : V(GP_{3,1}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2q - 1\}$ atau $f : V(GP_{3,1}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \cdots, 17\}$ dengan:

1.) Untuk $f : V\left(GP_{3,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 16\}$

Label titik untuk $f : V\left(GP_{3,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 16\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 0$	$f(v_0) = 14$
$f(u_1) = 2$	$f(v_1) = 16$
$f(u_2) = 4$	$f(v_2) = 12$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{3,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{3,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f *: E\left(GP_{3,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, 8\ \cdots, 2(q - 1)\}$ atau $f *: E\left(GP_{3,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 16\}$ dengan ketentuan $*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 18)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f * (u_0 u_1) = \left(f(u_0) + f(u_1)\right)(mod\ 18) = (0 + 2)(mod\ 18) = 2$

$f * (u_1 u_2) = \left(f(u_1) + f(u_2)\right)(mod\ 18) = (2 + 4)(mod\ 18) = 6$

$f * (u_2 u_0) = \left(f(u_2) + f(u_0)\right)(mod\ 18) = (4 + 0)(mod\ 18) = 4$

$f*(v_0v_1) = \big(f(v_0) + f(v_1)\big)(mod\ 18) = (14 + 16)(mod\ 18) = 12$

$f*(v_1v_2) = \big(f(v_1) + f(v_2)\big)(mod\ 18) = (16 + 12)(mod\ 18) = 10$

$f*(v_2v_0) = \big(f(v_2) + f(v_0)\big)(mod\ 18) = (12 + 14)(mod\ 18) = 8$

$f*(u_0v_0) = \big(f(u_0) + f(v_0)\big)(mod\ 18) = (0 + 14)(mod\ 18) = 14$

$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1) + f(v_1)\big)(mod\ 18) = (2 + 16)(mod\ 18) = 0$

$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2) + f(v_2)\big)(mod\ 18) = (4 + 12)(mod\ 18) = 16$

2.) Untuk $f : V\big(GP_{3,1}\big) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 17\}$

Label titik untuk $f : V\big(GP_{3,1}\big) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 17\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 1$	$f(v_0) = 15$
$f(u_1) = 3$	$f(v_1) = 17$
$f(u_2) = 5$	$f(v_2) = 13$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{3,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{3,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f*: E\big(GP_{3,1}\big) \to \{0, 2, 4, 6, 8\ \cdots, 2(q - 1)\}$ atau $f*: E\big(GP_{3,1}\big) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 16\}$ dengan ketentuan $f*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 18)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f*(u_0u_1) = \big(f(u_0) + f(u_1)\big)(mod\ 18) = (1 + 3)(mod\ 18) = 4$

$f*(u_1u_2) = \big(f(u_1) + f(u_2)\big)(mod\ 18) = (3 + 5)(mod\ 18) = 8$

$f*(u_2u_0) = \big(f(u_2) + f(u_0)\big)(mod\ 18) = (5 + 1)(mod\ 18) = 6$

$f*(v_0v_1) = \big(f(v_0) + f(v_1)\big)(mod\ 18) = (15 + 17)(mod\ 18) = 14$

$f*(v_1v_2) = \big(f(v_1) + f(v_2)\big)(mod\ 18) = (17 + 13)(mod\ 18) = 12$

$f*(v_2v_0) = \big(f(v_2) + f(v_0)\big)(mod\ 18) = (13 + 15)(mod\ 18) = 10$

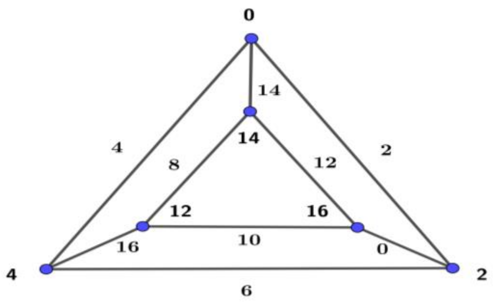
$f*(u_0v_0) = \big(f(u_0) + f(v_0)\big)(mod\ 18) = (1 + 15)(mod\ 18) = 16$

$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1) + f(v_1)\big)(mod\ 18) = (3 + 17)(mod\ 18) = 2$

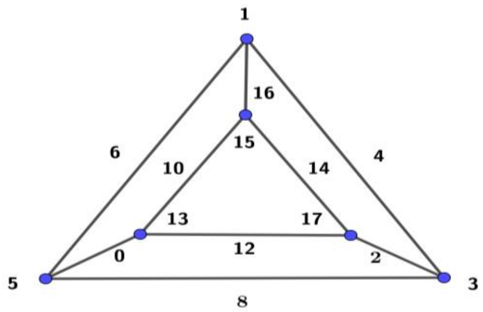
$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2) + f(v_2)\big)(mod\ 18) = (5 + 13)(mod\ 18) = 0$

Langkah III

Memberikan label pada masing-masing titik dan sisi pada graf Petersen diperumum $GP_{3,1}$ dengan hasil perhitungan dari langkah II, sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 3.2.



(a)



(b)

Gambar 3.2 Pelabelan harmonis sejati genap $GP_{3,1}$

Langkah IV

Berdasarkan fungsi pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{3,1}$, maka diperoleh pola sebagai berikut:

1.) Untuk $f : V(GP_{3,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 16\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 0 = 2(0)$

$f(u_1) = 2 = 2(1)$

$f(u_2) = 4 = 2(2)$

$f(v_0) = 14 = 4(3) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(3)$

$f(v_1) = 16 = 4(3) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(3)$

$f(v_2) = 12 = 4(3) + (2(2) + 2) mod\ 2(3)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i$, $i = 0,1,2$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n$, $i = 0,1,2$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0u_1) = 2 = 4(0) + 2$

$f * (u_1u_2) = 6 = 4(1) + 2$

$f * (u_2u_0) = 4 = 2(2)$

$f * (v_0v_1) = 12 = 2(3) + 4(0) + 6$

$f * (v_1v_2) = 10 = 4(1) + 6$

$f * (v_2v_0) = 8 = 2(2) + 4$

$f * (u_0v_0) = 14 = 4(5) + 4(0) + 2$

$f * (u_1v_1) = 0$

$f * (u_2v_2) = 16 = 6(2) + 4$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i+2 & , \ i = 0, 1 \\ 2i & , \ i = 2 \end{cases}$

(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n+4i+6 & , \ i = 0 \\ 4i+6 & , \ i = 1 \\ 2i+4 & , \ i = 2 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) \quad = \begin{cases} 4n+4i+2 & , \ i = 0 \\ 0 & , \ i = 1 \\ 6i+4 & , \ i = 2 \end{cases}$

2.) Untuk $f : V\left(GP_{3,1}\right) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 17\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 1 = \ 2(0) + 1$

$f(u_1) = 3 = 2(1) + 1$

$f(u_2) = 5 = 2(2) + 1$

$f(v_0) = 15 = 4(3) + (2(0) + 3) \ mod \ 2(3)$

$f(v_1) = 17 = 4(3) + (2(1) + 3) \ mod \ 2(3)$

$f(v_2) = 13 = 4(3) + (2(2) + 3) mod \ 2(3)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i + 1 \qquad , \ i = 0,1,2$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3) mod \ 2n \qquad , \ i = 0,1,2$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0 u_1) = 4 = 4(0) + 4$

$f * (u_1 u_2) = 8 = 4(1) + 4$

$f * (u_2 u_0) = 6 = 2(2) + 2$

$f * (v_0 v_1) = 14 = 2(3) + 4(0) + 8$

$f * (v_1 v_2) = 12 = 3(3) + 1 + 2$

$f * (v_2 v_0) = 10 = 2(3) + 4$

$f*(u_0v_0) = 16 = 4(3) + 4(0) + 4$

$f*(u_1v_1) = 2$

$f*(u_2v_2) = 0$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i+4 & , \ i = 0,1 \\ 2i+2 & , \ i = 2 \end{cases}$

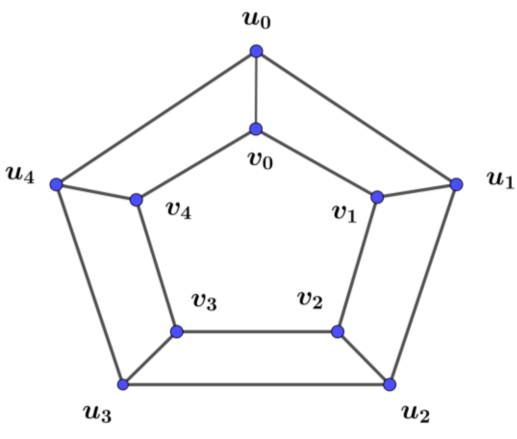
(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n+4i+8 & , \ i = 0 \\ 3n+i+2 & , \ i = 1 \\ 2n+4 & , \ i = 2 \end{cases}$

(iii) $f(u_iv_i) = \begin{cases} 4n+4i+4 & , \ i = 0 \\ 2 & , \ i = 1 \\ 0 & , \ i = 2 \end{cases}$

3.1.2 Graf Petersen Diperumum $GP_{5,1}$

Langkah I

Diberikan graf Petersen diperumum $GP_{5,1}$ seperti pada gambar 3.3.



Gambar 3.3 Penotasian titik dan sisi $GP_{5,1}$

Sehingga dari langkah pertama ini kita peroleh graf Petersen diperumum $GP_{5,1}$ memiliki himpunan titik $V(GP_{5,1})$ dan himpunan sisi $E(GP_{5,1})$ yaitu:

$V\left(GP_{5,1}\right) = \{\, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4,$

$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E\left(GP_{5,1}\right) = \{u_0u_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_0,$

$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_0,$

$u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4\}$

Sehingga dapat diketahui bahwa order atau banyaknya titik dari $GP_{5,1}$ adalah $p = 10$ dan ukuran atau banyaknya sisi dari $GP_{5,1}$ adala $q = 15$.

Langkah II

Didefinisikan fungsi $f : V(GP_{5,1}) \to \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2q - 1\}$ atau $f : V(GP_{5,1}) \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 29\}$ dengan:

1.) Untuk $f : V\left(GP_{5,1}\right) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 28\}$

Label titik untuk $f : V\left(GP_{5,1}\right) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 28\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 0$	$f(v_0) = 22$
$f(u_1) = 2$	$f(v_1) = 24$
$f(u_2) = 4$	$f(v_2) = 26$
$f(u_3) = 6$	$f(v_3) = 28$
$f(u_4) = 8$	$f(v_4) = 20$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{5,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{5,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f *: E(GP_{5,1}) \to \{0, 2, 4, 6, 8 \cdots, 2q\}$ atau $f *: E(GP_{5,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 30\}$ dengan ketentuan $f * (uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 30)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f * (u_0u_1) = \big(f(u_0) + f(u_1)\big)(mod\ 30) = (0 + 2)(mod\ 30) = 2$

$f * (u_1u_2) = \big(f(u_1) + f(u_2)\big)(mod\ 30) = (2 + 4)(mod\ 30) = 6$

$f * (u_2u_3) = \big(f(u_2) + f(u_3)\big)(mod\ 30) = (4 + 6)(mod\ 30) = 10$

$f * (u_3u_4) = \big(f(u_3) + f(u_4)\big)(mod\ 30) = (6 + 8)(mod\ 30) = 14$

$f * (u_4u_0) = \big(f(u_4) + f(u_0)\big)(mod\ 30) = (8 + 0)(mod\ 30) = 8$

$f * (v_0v_1) = \big(f(v_0) + f(v_1)\big)(mod\ 30) = (22 + 24)(mod\ 30) = 16$

$f * (v_1v_2) = \big(f(v_1) + f(v_2)\big)(mod\ 30) = (24 + 26)(mod\ 30) = 20$

$f * (v_2v_3) = \big(f(v_2) + f(v_3)\big)(mod\ 30) = (26 + 28)(mod\ 30) = 24$

$f * (v_3v_4) = \big(f(v_3) + f(v_4)\big)(mod\ 30) = (28 + 20)(mod\ 30) = 18$

$f * (v_4v_0) = \big(f(v_4) + f(v_0)\big)(mod\ 30) = (20 + 22)(mod\ 30) = 12$

$f * (u_0v_0) = \big(f(u_0) + f(v_0)\big)(mod\ 30) = (0 + 22)(mod\ 30) = 22$

$f * (u_1v_1) = \big(f(u_1) + f(v_1)\big)(mod\ 30) = (2 + 24)(mod\ 30) = 26$

$f * (u_2v_2) = \big(f(u_2) + f(v_2)\big)(mod\ 30) = (4 + 26)(mod\ 30) = 0$

$f * (u_3v_3) = \big(f(u_3) + f(v_3)\big)(mod\ 30) = (6 + 28)(mod\ 30) = 4$

$f * (u_4v_4) = \big(f(u_4) + f(v_4)\big)(mod\ 30) = (8 + 20)(mod\ 30) = 28$

2.) Untuk $f : V(GP_{5,1}) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 29\}$

Label titik untuk $f: V(GP_{5,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 29\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 1$	$f(v_0) = 23$
$f(u_1) = 3$	$f(v_1) = 25$
$f(u_2) = 5$	$f(v_2) = 27$
$f(u_3) = 7$	$f(v_3) = 29$
$f(u_4) = 9$	$f(v_4) = 21$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{5,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{5,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f *: E(GP_{5,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, 8 \cdots, 2(q - 1)\}$ atau $f *: E(GP_{5,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 28\}$ dengan ketentuan $f * (uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 30)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f * (u_0u_1) = \big(f(u_0) + f(u_1)\big)(mod\ 30) = (1 + 3)(mod\ 30) = 4$

$f * (u_1u_2) = \big(f(u_1) + f(u_2)\big)(mod\ 30) = (3 + 5)(mod\ 30) = 8$

$f * (u_2u_3) = \big(f(u_2) + f(u_3)\big)(mod\ 30) = (5 + 7)(mod\ 30) = 12$

$f * (u_3u_4) = \big(f(u_3) + f(u_4)\big)(mod\ 30) = (7 + 9)(mod\ 30) = 16$

$f * (u_4u_0) = \big(f(u_4) + f(u_0)\big)(mod\ 30) = (9 + 1)(mod\ 30) = 10$

$f * (v_0v_1) = \big(f(v_0) + f(v_1)\big)(mod\ 30) = (23 + 25)(mod\ 30) = 18$

$f * (v_1v_2) = \big(f(v_1) + f(v_2)\big)(mod\ 30) = (25 + 27)(mod\ 30) = 22$

$f * (v_2v_3) = \big(f(v_2) + f(v_3)\big)(mod\ 30) = (27 + 29)(mod\ 30) = 26$

$$f*(v_3v_4) = \left(f(v_3) + f(v_4)\right)(mod\ 30) = (29 + 21)(mod\ 30) = 20$$

$$f*(v_4v_0) = \left(f(v_4) + f(v_0)\right)(mod\ 30) = (21 + 23)(mod\ 30) = 14$$

$$f*(u_0v_0) = \left(f(u_0) + f(v_0)\right)(mod\ 30) = (1 + 23)(mod\ 30) = 24$$

$$f*(u_1v_1) = \left(f(u_1) + f(v_1)\right)(mod\ 30) = (3 + 25)(mod\ 30) = 28$$

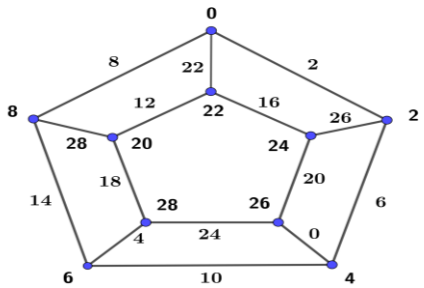
$$f*(u_2v_2) = \left(f(u_2) + f(v_2)\right)(mod\ 30) = (5 + 27)(mod\ 30) = 2$$

$$f*(u_3v_3) = \left(f(u_3) + f(v_3)\right)(mod\ 30) = (7 + 29)(mod\ 30) = 6$$

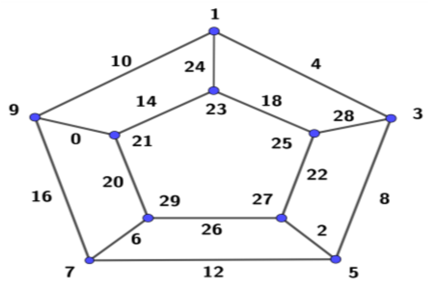
$$f*(u_4v_4) = \left(f(u_4) + f(v_4)\right)(mod\ 30) = (9 + 21)(mod\ 30) = 0$$

Langkah III

Memberikan label pada masing-masing titik dan sisi pada graf Petersen diperumum $GP_{5,1}$ dengan perhitungan dari langkah II, sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 3.4.



(a)



(b)

Gambar 3.4 Pelabelan harmonis sejati genap $GP_{5,1}$

Langkah IV

Dari fungsi pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{5,1}$, maka diperoleh pola sebagai berikut:

1.) Untuk $f : V(GP_{5,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n-2\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 0 = 2(0)$

$f(u_1) = 2 = 2(1)$

$f(u_2) = 4 = 2(2)$

$f(u_3) = 6 = 2(3)$

$f(u_4) = 8 = 2(4)$

$f(v_0) = 22 = 4(5) + (2(0) + 2) mod\ 2(5)$

$f(v_1) = 24 = 4(5) + (2(1) + 2) mod\ 2(5)$

$f(v_2) = 26 = 4(5) + (2(2) + 2) mod\ 2(5)$

$f(v_3) = 28 = 4(5) + (2(3) + 2) mod\ 2(5)$

$f(v_4) = 20 = 4(5) + (2(4) + 2) mod\ 2(5)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i$, $i = 0,1,2,3,4$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3,4$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0u_1) = 2 = 4(0) + 2$

$f * (u_1u_2) = 6 = 4(1) + 2$

$f * (u_2u_3) = 10 = 4(2) + 2$

$f * (u_3u_4) = 14 = 4(3) + 2$

$f * (u_4u_0) = 8 = 2(4)$

$f*(v_0v_1) = 16 = 2(5) + 4(0) + 6$

$f*(v_1v_2) = 20 = 2(5) + 4(1) + 6$

$f*(v_2v_3) = 24 = 2(5) + 4(2) + 6$

$f*(v_3v_4) = 18 = 4(3) + 6$

$f*(v_4v_0) = 12 = 2(4) + 4$

$f*(u_0v_0) = 22 = 4(5) + 4(0) + 2$

$f*(u_1v_1) = 26 = 4(5) + 4(0) + 2$

$f*(u_2v_2) = 0$

$f*(u_3v_3) = 4 = 4(3) - 2(5) + 2$

$f*(u_4v_4) = 28 = 6(4) + 4$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 2 & , \ i = 0,1,2,3 \\ 2i & , \ i = 4 \end{cases}$

(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 6 & , \ i = 0,1,2 \\ 4i + 6 & , \ i = 3 \\ 2i + 4 & , \ i = 4 \end{cases}$

(iii) $f(u_iv_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 2 & , \ i = 0,1 \\ 0 & , \ i = 2 \\ 4i - 2n + 2 & , \ i = 3 \\ 6i + 4 & , \ i = 4 \end{cases}$

2.) Untuk $f : V(GP_{5,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 6n - 1\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 1 = 2(0) + 1$

$f(u_1) = 3 = 2(1) + 1$

$f(u_2) = 5 = 2(2) + 1$

$f(u_3) = 7 = 2(3) + 1$

$f(u_4) = 9 = 2(4) + 1$

$f(v_0) = 23 = 4(5) + (2(0) + 3)\ mod\ 2(5)$

$f(v_1) = 25 = 4(5) + (2(1) + 3)\ mod\ 2(5)$

$f(v_2) = 27 = 4(5) + (2(2) + 3)\ mod\ 2(5)$

$f(v_3) = 29 = 4(5) + (2(3) + 3)\ mod\ 2(5)$

$f(v_4) = 21 = 4(5) + (2(4) + 3)\ mod\ 2(5)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i + 1$, $i = 0,1,2,3,4$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3,4$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0u_1) = 4 = 4(0) + 4$

$f * (u_1u_2) = 8 = 4(1) + 4$

$f * (u_2u_3) = 12 = 4(2) + 4$

$f * (u_3u_4) = 16 = 4(3) + 4$

$f * (u_4u_0) = 10 = 2(4) + 2$

$f * (v_0v_1) = 18 = 2(5) + 4(0) +$

$f * (v_1v_2) = 22 = 2(5) + 4(1) +$

$f * (v_2v_3) = 26 = 2(5) + 4(2) + 8$

$f * (v_3v_4) = 20 = 3(5) + 3 + 2$

$f * (v_4v_0) = 14 = 2(5) + 4$

$f * (u_0v_0) = 24 = 4(5) + 4(0) + 4$

$f * (u_1v_1) = 28 = 4(5) + 4(1) + 4$

$f * (u_2v_2) = 2$

$f * (u_3v_3) = 6 = 4(3) - 2(5) + 4$

$f * (u_4 v_4) = 0$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 4 & , \ i = 0, 1, 2, 3 \\ 2i + 2 & , \ i = 4 \end{cases}$

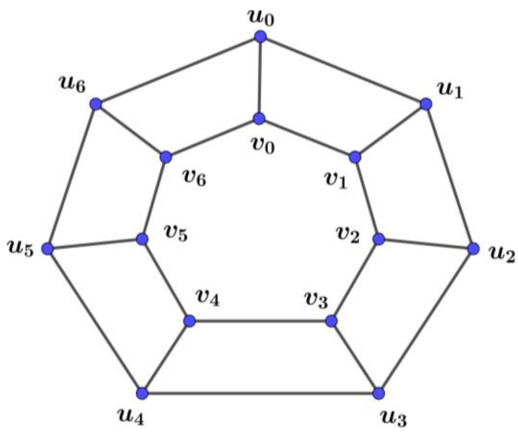
(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 8 & , \ i = 0, 1, 2 \\ 3n + i + 2 & , \ i = 3 \\ 2n + 4 & , \ i = 4 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) \quad = \begin{cases} 4n + 4i + 4 & , \ i = 0, 1 \\ 2 & , \ i = 2 \\ 4i - 2n + 4 & , \ i = 3 \\ 0 & , \ i = 4 \end{cases}$

3.1.3 Graf Petersen Diperumum $GP_{7,1}$

Langkah I

Diberikan graf Petersen diperumum $GP_{7,1}$ seperti pada gambar 3.5.



Gambar 3.5 Penotasian titik dan sisi $GP_{7,1}$

Sehingga dari langkah pertama ini kita peroleh graf Petersen diperumum $GP_{7,1}$ memiliki himpunan titik $V(GP_{7,1})$ dan himpunan sisi $E(GP_{7,1})$ yaitu:

$V(GP_{7,1}) = \{ u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6,$

$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E(GP_{7,1}) = \{u_0u_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6u_0$

$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_0$

$u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5, u_6v_6\}$

Sehingga dapat diketahui bahwa order atau banyaknya titik dari $GP_{7,1}$ adalah $p = 14$ dan ukuran atau banyaknya sisi dari $GP_{7,1}$ adala $q = 21$.

Langkah II

Didefinisikan fungsi $f : V(GP_{7,1}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2q - 1\}$ atau $f : V(GP_{7,1}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \cdots, 41\}$ dengan:

1.) Untuk $f : V(GP_{7,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 40\}$

Label titik untuk $f : V(GP_{7,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 40\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 0$	$f(v_0) = 30$
$f(u_1) = 2$	$f(v_1) = 32$
$f(u_2) = 4$	$f(v_2) = 34$
$f(u_3) = 6$	$f(v_3) = 36$
$f(u_4) = 8$	$f(v_4) = 38$
$f(u_5) = 10$	$f(v_5) = 40$
$f(u_6) = 12$	$f(v_6) = 28$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{7,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{7,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f*: E\left(GP_{7,1}\right) \to \{0, 2, 4, 6, 8\ \cdots, 2(q-1)\}$ atau $f*: E\left(GP_{7,1}\right) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 40\}$ dengan ketentuan $*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 42)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f*(u_0u_1) = \left(f(u_0) + f(u_1)\right)(mod\ 42) = (0+2)(mod\ 42) = 2$

$f*(u_1u_2) = \left(f(u_1) + f(u_2)\right)(mod\ 42) = (2+4)(mod\ 42) = 6$

$f*(u_2u_3) = \left(f(u_2) + f(u_3)\right)(mod\ 42) = (4+6)(mod\ 42) = 10$

$f*(u_3u_4) = \left(f(u_3) + f(u_4)\right)(mod\ 42) = (6+8)(mod\ 42) = 14$

$f*(u_4u_5) = \left(f(u_4) + f(u_5)\right)(mod\ 42) = (8+10)(mod\ 42) = 18$

$f*(u_5u_6) = \left(f(u_5) + f(u_6)\right)(mod\ 42) = (10+12)(mod\ 42) = 22$

$f*(u_6u_0) = \left(f(u_6) + f(u_0)\right)(mod\ 42) = (12+0)(mod\ 42) = 12$

$f*(v_0v_1) = \left(f(v_0) + f(v_1)\right)(mod\ 42) = (30+32)(mod\ 42) = 20$

$f*(v_1v_2) = \left(f(v_1) + f(v_2)\right)(mod\ 42) = (32+34)(mod\ 42) = 24$

$f*(v_2v_3) = \left(f(v_2) + f(v_3)\right)(mod\ 42) = (34+36)(mod\ 42) = 28$

$f*(v_3v_4) = \left(f(v_3) + f(v_4)\right)(mod\ 42) = (36+38)(mod\ 42) = 32$

$f*(v_4v_5) = \left(f(v_4) + f(v_5)\right)(mod\ 42) = (38+40)(mod\ 42) = 36$

$f*(v_5v_6) = \left(f(v_5) + f(v_6)\right)(mod\ 42) = (40+28)(mod\ 42) = 26$

$f*(v_6v_0) = \left(f(v_6) + f(v_0)\right)(mod\ 42) = (28+30)(mod\ 42) = 16$

$f*(u_0v_0) = \left(f(u_0) + f(v_0)\right)(mod\ 42) = (0+30)(mod\ 42) = 30$

$f*(u_1v_1) = \left(f(u_1) + f(v_1)\right)(mod\ 42) = (2+32)(mod\ 42) = 34$

$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2)+f(v_2)\big)(mod\ 42) = (4+34)(mod\ 42) = 38$

$f*(u_3v_3) = \big(f(u_3)+f(v_3)\big)(mod\ 42) = (6+36)(mod\ 42) = 0$

$f*(u_4v_4) = \big(f(u_4)+f(v_4)\big)(mod\ 42) = (8+38)(mod\ 42) = 4$

$f*(u_5v_5) = \big(f(u_5)+f(v_5)\big)(mod\ 42) = (10+40)(mod\ 42) = 8$

$f*(u_6v_6) = \big(f(u_6)+f(v_6)\big)(mod\ 42) = (12+28)(mod\ 42) = 40$

2.) Untuk $f : V\big(GP_{7,1}\big) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 41\}$

Label titik untuk $f : V\big(GP_{7,1}\big) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 41\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 1$	$f(v_0) = 31$
$f(u_1) = 3$	$f(v_1) = 33$
$f(u_2) = 5$	$f(v_2) = 35$
$f(u_3) = 7$	$f(v_3) = 37$
$f(u_4) = 9$	$f(v_4) = 39$
$f(u_5) = 11$	$f(v_5) = 41$
$f(u_6) = 13$	$f(v_6) = 29$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{7,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{7,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f*: E\big(GP_{7,1}\big) \to \{0, 2, 4, 6, 8\ \cdots, 2(q-1)\}$ atau $f*: E\big(GP_{7,1}\big) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 40\}$ dengan ketentuan $f*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 42)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$$f*(u_0u_1) = \big(f(u_0)+f(u_1)\big)(mod\ 42) = (1+3)(mod\ 42) = 4$$

$$f*(u_1u_2) = \big(f(u_1)+f(u_2)\big)(mod\ 42) = (3+5)(mod\ 42) = 8$$

$$f*(u_2u_3) = \big(f(u_2)+f(u_3)\big)(mod\ 42) = (5+7)(mod\ 42) = 12$$

$$f*(u_3u_4) = \big(f(u_3)+f(u_4)\big)(mod\ 42) = (7+9)(mod\ 42) = 16$$

$$f*(u_4u_5) = \big(f(u_4)+f(u_5)\big)(mod\ 42) = (9+11)(mod\ 42) = 18$$

$$f*(u_5u_6) = \big(f(u_5)+f(u_6)\big)(mod\ 42) = (11+13)(mod\ 42) = 24$$

$$f*(u_6u_0) = \big(f(u_6)+f(u_0)\big)(mod\ 42) = (13+1)(mod\ 42) = 14$$

$$f*(v_0v_1) = \big(f(v_0)+f(v_1)\big)(mod\ 42) = (31+33)(mod\ 42) = 22$$

$$f*(v_1v_2) = \big(f(v_1)+f(v_2)\big)(mod\ 42) = (33+35)(mod\ 42) = 26$$

$$f*(v_2v_3) = \big(f(v_2)+f(v_3)\big)(mod\ 42) = (35+37)(mod\ 42) = 30$$

$$f*(v_3v_4) = \big(f(v_3)+f(v_4)\big)(mod\ 42) = (37+39)(mod\ 42) = 34$$

$$f*(v_4v_5) = \big(f(v_4)+f(v_5)\big)(mod\ 42) = (39+41)(mod\ 42) = 38$$

$$f*(v_5v_6) = \big(f(v_5)+f(v_6)\big)(mod\ 42) = (41+29)(mod\ 42) = 28$$

$$f*(v_6v_0) = \big(f(v_6)+f(v_0)\big)(mod\ 42) = (29+31)(mod\ 42) = 18$$

$$f*(u_0v_0) = \big(f(u_0)+f(v_0)\big)(mod\ 42) = (1+31)(mod\ 42) = 32$$

$$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1)+f(v_1)\big)(mod\ 42) = (3+33)(mod\ 42) = 36$$

$$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2)+f(v_2)\big)(mod\ 42) = (5+35)(mod\ 42) = 40$$

$$f*(u_3v_3) = \big(f(u_3)+f(v_3)\big)(mod\ 42) = (7+37)(mod\ 42) = 2$$

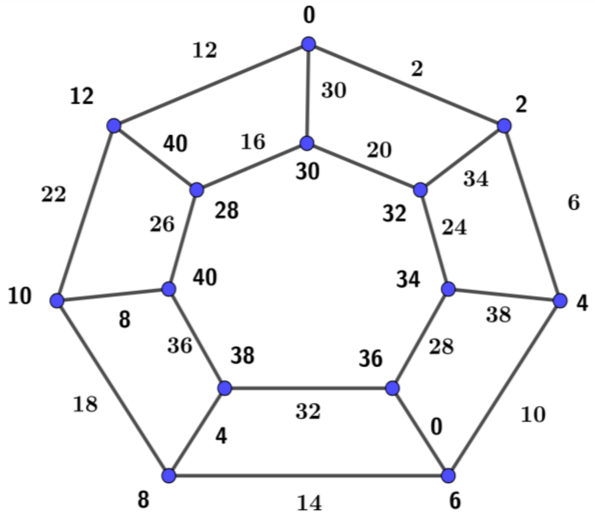
$$f*(u_4v_4) = \big(f(u_4)+f(v_4)\big)(mod\ 42) = (9+39)(mod\ 42) = 6$$

$$f*(u_5v_5) = \big(f(u_5)+f(v_5)\big)(mod\ 42) = (11+41)(mod\ 42) = 10$$

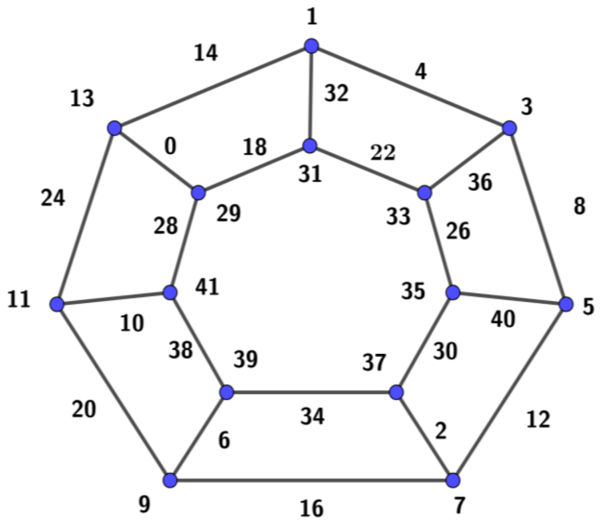
$$f*(u_6v_6) = \big(f(u_6)+f(v_6)\big)(mod\ 42) = (13+29)(mod\ 42) = 0$$

Langkah III

Memberikan label pada masing-masing titik dan sisi pada graf Petersen diperumum $GP_{7,1}$ dengan hasil perhitungan dari langkah II, sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 3.6.



(a)



(b)

Gambar 3.6 Pelabelan harmonis sejati genap $GP_{7,1}$

Langkah IV

Dari fungsi pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{7,1}$, maka diperoleh pola sebagai berikut:

1.) Untuk $f : V\left(GP_{7,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 40\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 0 = 2(0)$

$f(u_1) = 2 = 2(1)$

$f(u_2) = 4 = 2(2)$

$f(u_3) = 6 = 2(3)$

$f(u_4) = 8 = 2(4)$

$f(u_5) = 10 = 2(5)$

$f(u_6) = 12 = 2(6)$

$f(v_0) = 30 = 4(7) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(7)$

$f(v_1) = 32 = 4(7) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(7)$

$f(v_2) = 34 = 4(7) + (2(2) + 2)\ mod\ 2(7)$

$f(v_3) = 36 = 4(7) + (2(3) + 2)\ mod\ 2(7)$

$f(v_4) = 38 = 4(7) + (2(4) + 2)\ mod\ 2(7)$

$f(v_5) = 40 = 4(7) + (2(5) + 2)\ mod\ 2(7)$

$f(v_6) = 28 = 4(7) + (2(6) + 2)\ mod\ 2(7)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i$, $i = 0,1,2,3,4,5,6$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3,4,5,6$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f*(u_0u_1) = 2 = 4(0) + 2$

$f*(u_1u_2) = 6 = 4(1) + 2$

$f*(u_2u_3) = 10 = 4(2) + 2$

$f*(u_3u_4) = 14 = 4(3) + 2$

$f*(u_4u_5) = 18 = 4(4) + 2$

$f*(u_5u_6) = 22 = 4(5) + 2$

$f*(u_6u_0) = 12 = 2(6)$

$f*(v_0v_1) = 20 = 2(7) + 4(0) + 6$

$f*(v_1v_2) = 24 = 2(7) + 4(1) + 6$

$f*(v_2v_3) = 28 = 2(7) + 4(2) + 6$

$f*(v_3v_4) = 32 = 2(7) + 4(3) + 6$

$f*(v_4v_5) = 36 = 2(7) + 4(4) + 6$

$f*(v_5v_6) = 26 = 4(5) + 6$

$f*(v_6v_0) = 16 = 2(6) + 4$

$f*(u_0v_0) = 30 = 4(7) + 4(0) + 2$

$f*(u_1v_1) = 34 = 4(7) + 4(1) + 2$

$f*(u_2v_2) = 38 = 4(7) + 4(2) + 2$

$f*(u_3v_3) = 0$

$f*(u_4v_4) = 4 = 4(4) - 2(7) + 2$

$f*(u_5v_5) = 8 = 4(5) - 2(7) + 2$

$f*(u_6v_6) = 40 = 6(6) + 4$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 2 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2i & , \ i = 6 \end{cases}$

(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 6 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 4i + 6 & , \ i = 5 \\ 2i + 4 & , \ i = 6 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) \quad = \begin{cases} 4n + 4i + 2 & , \ i = 0, 1, 2 \\ 0 & , \ i = 3 \\ 4i - 2n + 2 & , \ i = 4, 5 \\ 6i + 4 & , \ i = 6 \end{cases}$

2.) Untuk $f : V(GP_{7,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 41\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 1 = 2(0) + 1$

$f(u_1) = 3 = 2(1) + 1$

$f(u_2) = 5 = 2(2) + 1$

$f(u_3) = 7 = 2(3) + 1$

$f(u_4) = 9 = 2(4) + 1$

$f(u_5) = 11 = 2(5) + 1$

$f(u_6) = 13 = 2(6) + 1$

$f(v_0) = 31 = 4(7) + (2(0) + 3) \ mod \ 2(7)$

$f(v_1) = 33 = 4(7) + (2(1) + 3) \ mod \ 2(7)$

$f(v_2) = 35 = 4(7) + (2(2) + 3) \ mod \ 2(7)$

$f(v_3) = 37 = 4(7) + (2(3) + 3) \ mod \ 2(7)$

$f(v_4) = 39 = 4(7) + (2(4) + 3) \ mod \ 2(7)$

$f(v_5) = 41 = 4(7) + (2(5) + 3) \ mod \ 2(7)$

$f(v_6) = 29 = 4(7) + (2(6) + 3) \ mod \ 2(7)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i + 1 \quad , \ i = 0,1,2,3,4,5,6$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3) mod \ 2n \quad , \ i = 0,1,2,3,4,5,6$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0 u_1) = 4 = 4(0) + 4$

$f*(u_1u_2) = 8 = 4(1) + 4$

$f*(u_2u_3) = 12 = 4(2) + 4$

$f*(u_3u_4) = 16 = 4(3) + 4$

$f*(u_4u_5) = 18 = 4(4) + 4$

$f*(u_5u_6) = 24 = 4(5) + 4$

$f*(u_6u_0) = 14 = 2(6) + 2$

$f*(v_0v_1) = 22 = 2(7) + 4(0) + 8$

$f*(v_1v_2) = 26 = 2(7) + 4(1) + 8$

$f*(v_2v_3) = 30 = 2(7) + 4(2) + 8$

$f*(v_3v_4) = 34 = 2(7) + 4(3) + 8$

$f*(v_4v_5) = 38 = 2(7) + 4(4) + 8$

$f*(v_5v_6) = 28 = 3(7) + 5 + 2$

$f*(v_6v_0) = 18 = 2(7) + 4$

$f*(u_0v_0) = 32 = 4(7) + 4(0) + 4$

$f*(u_1v_1) = 36 = 4(7) + 4(1) + 4$

$f*(u_2v_2) = 40 = 4(7) + 4(2) + 4$

$f*(u_3v_3) = 2$

$f*(u_4v_4) = 6 = 4(4) - 2(7) + 4$

$f*(u_5v_5) = 10 = 4(5) - 2(7) + 4$

$f*(u_6v_6) = 0$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 4 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2i + 2 & , \ i = 6 \end{cases}$

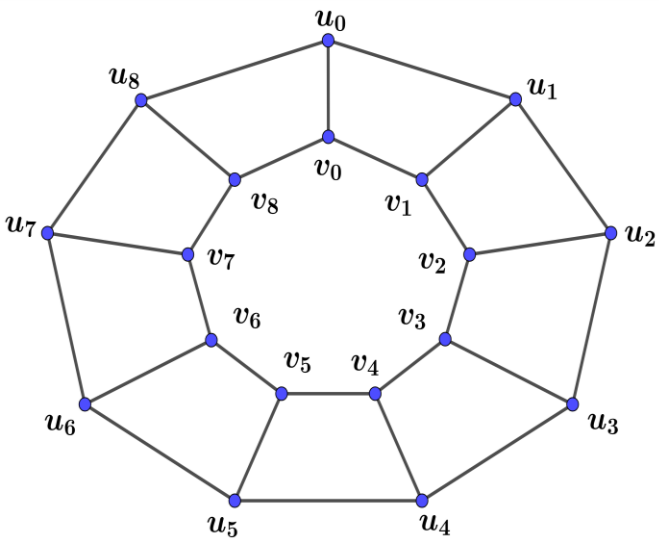
(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 8 & , \ i = 0,1, 2, 3, 4 \\ 3n + i + 2 & , \ i = 5 \\ 2n + 4 & , \ i = 6 \end{cases}$

$$\text{(iii) } f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 4 & , \ i = 0, 1, 2 \\ 2 & , \ i = 3 \\ 4i - 2n + 4 & , \ i = 4, 5 \\ 0 & , \ i = 6 \end{cases}$$

3.1.4 Graf Petersen Diperumum $GP_{9,1}$

Langkah I

Diberikan graf Petersen diperumum $GP_{9,1}$ seperti pada gambar 3.7.



Gambar 3.7 Penotasian titik dan sisi $GP_{9,1}$

Sehingga dari langkah pertama ini kita peroleh graf Petersen diperumum $GP_{9,1}$ memiliki himpunan titik $V(GP_{9,1})$ dan himpunan sisi $E(GP_{9,1})$ yaitu:

$V(GP_{9,1}) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$

$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$E(GP_{9,1}) = \{u_0u_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6u_7, u_7u_8, u_8u_0$

$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_0$

$u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5, u_6v_6, u_7v_7, u_8v_8\}$

Sehingga dapat diketahui bahwa order atau banyaknya titik dari $GP_{9,1}$ adalah $p = 18$ dan ukuran atau banyaknya sisi dari $GP_{9,1}$ adala $q = 27$.

Langkah II

Didefinisikan fungsi $f : V(GP_{9,1}) \to \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2q - 1\}$ atau $f : V(GP_{9,1}) \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 53\}$ dengan:

1.) Untuk $f : V(GP_{9,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 52\}$

Label titik untuk $f : V(GP_{9,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 52\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 0$	$f(v_0) = 38$
$f(u_1) = 2$	$f(v_1) = 40$
$f(u_2) = 4$	$f(v_2) = 42$
$f(u_3) = 6$	$f(v_3) = 44$
$f(u_4) = 8$	$f(v_4) = 46$
$f(u_5) = 10$	$f(v_5) = 48$
$f(u_6) = 12$	$f(v_6) = 50$
$f(u_7) = 14$	$f(v_7) = 52$
$f(u_8) = 16$	$f(v_8) = 36$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{9,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{9,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f*: E(GP_{9,1}) \to \{0, 2, 4, 6, 8 \cdots, 2(q-1)\}$ atau $f*: E(GP_{9,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 52\}$ dengan ketentuan $f*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 54)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f*(u_0u_1) = (f(u_0) + f(u_1))(mod\ 54) = (0+2)(mod\ 54) = 2$

$f*(u_1u_2) = (f(u_1) + f(u_2))(mod\ 54) = (2+4)(mod\ 54) = 6$

$f*(u_2u_3) = (f(u_2) + f(u_3))(mod\ 54) = (4+6)(mod\ 54) = 10$

$f*(u_3u_4) = (f(u_3) + f(u_4))(mod\ 54) = (6+8)(mod\ 54) = 14$

$f*(u_4u_5) = (f(u_4) + f(u_5))(mod\ 54) = (8+10)(mod\ 54) = 18$

$f*(u_5u_6) = (f(u_5) + f(u_6))(mod\ 54) = (10+12)(mod\ 54) = 22$

$f*(u_6u_7) = (f(u_6) + f(u_7))(mod\ 54) = (12+14)(mod\ 54) = 26$

$f*(u_7u_8) = (f(u_7) + f(u_8))(mod\ 54) = (14+16)(mod\ 54) = 30$

$f*(u_8u_0) = (f(u_8) + f(u_0))(mod\ 54) = (16+0)(mod\ 54) = 16$

$f*(v_0v_1) = (f(v_0) + f(v_1))(mod\ 54) = (38+40)(mod\ 54) = 24$

$f*(v_1v_2) = (f(v_1) + f(v_2))(mod\ 54) = (40+42)(mod\ 54) = 28$

$f*(v_2v_3) = (f(v_2) + f(v_3))(mod\ 54) = (42+44)(mod\ 54) = 32$

$f*(v_3v_4) = (f(v_3) + f(v_4))(mod\ 54) = (44+46)(mod\ 54) = 36$

$f*(v_4v_5) = (f(v_4) + f(v_5))(mod\ 54) = (46+48)(mod\ 54) = 40$

$f*(v_5v_6) = (f(v_5) + f(v_6))(mod\ 54) = (48+50)(mod\ 54) = 44$

$f*(v_6v_7) = (f(v_6) + f(v_7))(mod\ 54) = (50+52)(mod\ 54) = 48$

$f*(v_7v_8) = (f(v_7) + f(v_8))(mod\ 54) = (52+36)(mod\ 54) = 34$

$f*(v_8v_0) = (f(v_8) + f(v_0))(mod\ 54) = (36+38)(mod\ 54) = 20$

$f*(u_0v_0) = (f(u_0) + f(v_0))(mod\ 54) = (0+38)(mod\ 54) = 38$

$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1) + f(v_1)\big)(mod\ 54) = (2 + 40)(mod\ 54) = 42$

$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2) + f(v_2)\big)(mod\ 54) = (4 + 42)(mod\ 54) = 46$

$f*(u_3v_3) = \big(f(u_3) + f(v_3)\big)(mod\ 54) = (6 + 44)(mod\ 54) = 50$

$f*(u_4v_4) = \big(f(u_4) + f(v_4)\big)(mod\ 54) = (8 + 46)(mod\ 54) = 0$

$f*(u_5v_5) = \big(f(u_5) + f(v_5)\big)(mod\ 54) = (10 + 48)(mod\ 54) = 4$

$f*(u_6v_6) = \big(f(u_6) + f(v_6)\big)(mod\ 54) = (12 + 50)(mod\ 54) = 8$

$f*(u_7v_7) = \big(f(u_7) + f(v_7)\big)(mod\ 54) = (14 + 52)(mod\ 54) = 12$

$f*(u_8v_8) = \big(f(u_8) + f(v_8)\big)(mod\ 54) = (16 + 36)(mod\ 54) = 52$

2.) Untuk $f : V\big(GP_{9,1}\big) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 53\}$

Label titik untuk $f : V\big(GP_{9,1}\big) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 53\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 1$ $\qquad$ $f(v_0) = 39$

$f(u_1) = 3$ $\qquad$ $f(v_1) = 41$

$f(u_2) = 5$ $\qquad$ $f(v_2) = 43$

$f(u_3) = 7$ $\qquad$ $f(v_3) = 45$

$f(u_4) = 9$ $\qquad$ $f(v_4) = 47$

$f(u_5) = 11$ $\qquad$ $f(v_5) = 49$

$f(u_6) = 13$ $\qquad$ $f(v_6) = 51$

$f(u_7) = 15$ $\qquad$ $f(v_7) = 53$

$f(u_8) = 17$ $\qquad$ $f(v_8) = 37$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{9,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{9,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f *: E\big(GP_{9,1}\big) \to \{0, 2, 4, 6, 8\ \cdots, 2(q-1)\}$ atau $f *: E\big(GP_{9,1}\big) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 52\}$ dengan ketentuan $*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 54)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f * (u_0u_1) = \big(f(u_0) + f(u_1)\big)(mod\ 54) = (1 + 3)(mod\ 54) = 4$

$f * (u_1u_2) = \big(f(u_1) + f(u_2)\big)(mod\ 54) = (3 + 5)(mod\ 54) = 8$

$f * (u_2u_3) = \big(f(u_2) + f(u_3)\big)(mod\ 54) = (5 + 7)(mod\ 54) = 12$

$f * (u_3u_4) = \big(f(u_3) + f(u_4)\big)(mod\ 54) = (7 + 9)(mod\ 54) = 16$

$f * (u_4u_5) = \big(f(u_4) + f(u_5)\big)(mod\ 54) = (9 + 11)(mod\ 54) = 20$

$f * (u_5u_6) = \big(f(u_5) + f(u_6)\big)(mod\ 54) = (11 + 13)(mod\ 54) = 24$

$f * (u_6u_7) = \big(f(u_6) + f(u_7)\big)(mod\ 54) = (13 + 15)(mod\ 54) = 28$

$f * (u_7u_8) = \big(f(u_7) + f(u_8)\big)(mod\ 54) = (15 + 17)(mod\ 54) = 14$

$f * (u_8u_0) = \big(f(u_8) + f(u_0)\big)(mod\ 54) = (17 + 1)(mod\ 54) = 18$

$f * (v_0v_1) = \big(f(v_0) + f(v_1)\big)(mod\ 54) = (39 + 41)(mod\ 54) = 26$

$f * (v_1v_2) = \big(f(v_1) + f(v_2)\big)(mod\ 54) = (41 + 43)(mod\ 54) = 30$

$f * (v_2v_3) = \big(f(v_2) + f(v_3)\big)(mod\ 54) = (43 + 45)(mod\ 54) = 34$

$f * (v_3v_4) = \big(f(v_3) + f(v_4)\big)(mod\ 54) = (45 + 47)(mod\ 54) = 38$

$f * (v_4v_5) = \big(f(v_4) + f(v_5)\big)(mod\ 54) = (47 + 49)(mod\ 54) = 42$

$f * (v_5v_6) = \big(f(v_5) + f(v_6)\big)(mod\ 54) = (49 + 51)(mod\ 54) = 46$

$f * (v_6v_7) = \big(f(v_6) + f(v_7)\big)(mod\ 54) = (51 + 53)(mod\ 54) = 50$

$f*(v_7v_8) = \big(f(v_7) + f(v_8)\big)(mod\ 54) = (53 + 37)(mod\ 54) = 36$

$f*(v_8v_0) = \big(f(v_8) + f(v_0)\big)(mod\ 54) = (37 + 39)(mod\ 54) = 22$

$f*(u_0v_0) = \big(f(u_0) + f(v_0)\big)(mod\ 54) = (1 + 39)(mod\ 54) = 40$

$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1) + f(v_1)\big)(mod\ 54) = (3 + 41)(mod\ 54) = 44$

$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2) + f(v_2)\big)(mod\ 54) = (5 + 43)(mod\ 54) = 48$

$f*(u_3v_3) = \big(f(u_3) + f(v_3)\big)(mod\ 54) = (7 + 45)(mod\ 54) = 52$

$f*(u_4v_4) = \big(f(u_4) + f(v_4)\big)(mod\ 54) = (9 + 47)(mod\ 54) = 2$

$f*(u_5v_5) = \big(f(u_5) + f(v_5)\big)(mod\ 54) = (11 + 49)(mod\ 54) = 6$

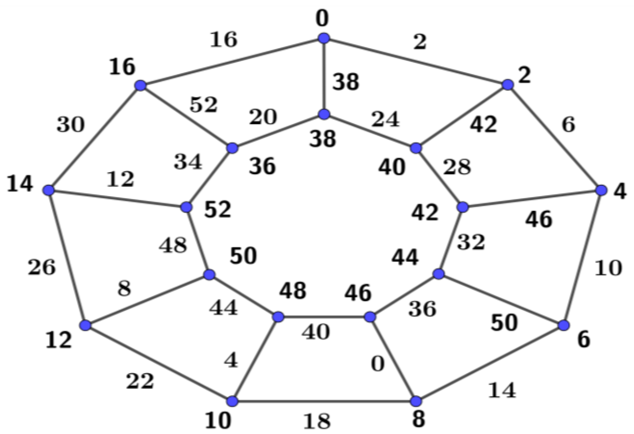
$f*(u_6v_6) = \big(f(u_6) + f(v_6)\big)(mod\ 54) = (13 + 51)(mod\ 54) = 10$

$f*(u_7v_7) = \big(f(u_7) + f(v_7)\big)(mod\ 54) = (15 + 53)(mod\ 54) = 14$

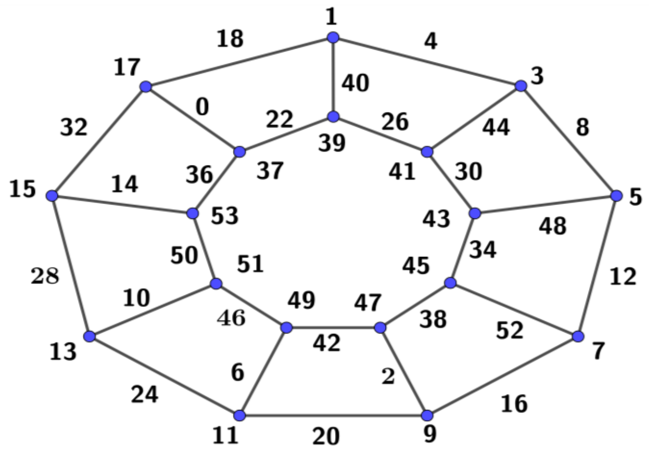
$f*(u_8v_8) = \big(f(u_8) + f(v_8)\big)(mod\ 54) = (17 + 37)(mod\ 54) = 0$

Langkah III

Memberikan label pada masing-masing titik dan sisi pada graf Petersen diperumum $GP_{9,1}$ dengan hasil perhitungan dari langkah II, sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 3.8.



(a)



(b)

Gambar 3.8 Pelabelan harmonis sejati genap $GP_{9,1}$

Langkah IV

Dari fungsi pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{9,1}$, maka diperoleh pola sebagai berikut:

1.) Untuk $f : V(GP_{9,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 52\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 0 = 2(0)$

$f(u_1) = 2 = 2(1)$

$f(u_2) = 4 = 2(2)$

$f(u_3) = 6 = 2(3)$

$f(u_4) = 8 = 2(4)$

$f(u_5) = 10 = 2(5)$

$f(u_6) = 12 = 2(6)$

$f(u_7) = 14 = 2(7)$

$f(u_8) = 16 = 2(8)$

$f(v_0) = 38 = 4(9) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_1) = 40\ = 4(9) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_2) = 42\ = 4(9) + (2(2) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_3) = 44\ = 4(9) + (2(3) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_4) = 46\ = 4(9) + (2(4) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_5) = 48\ = 4(9) + (2(5) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_6) = 50\ = 4(9) + (2(6) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_7) = 52\ = 4(9) + (2(7) + 2)\ mod\ 2(9)$

$f(v_8) = 36\ = 4(9) + (2(8) + 2)\ mod\ 2(9)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0u_1) = 2 = 4(0) + 2$

$f * (u_1u_2) = 6 = 4(1) + 2$

$f * (u_2u_3) = 10 = 4(2) + 2$

$f * (u_3u_4) = 14 = 4(3) + 2$

$f * (u_4u_5) = 18 = 4(4) + 2$

$f * (u_5u_6) = 22 = 4(5) + 2$

$f * (u_6u_7) = 26 = 4(6) + 2$

$f * (u_7u_8) = 30 = 4(7) + 2$

$f * (u_8u_0) = 16 = 2(8)$

$f * (v_0v_1) = 24 = 2(9) + 4(0) + 6$

$f * (v_1v_2) = 28 = 2(9) + 4(1) + 6$

$f * (v_2 v_3) = 32 = 2(9) + 4(2) + 6$

$f * (v_3 v_4) = 36 = 2(9) + 4(3) + 6$

$f * (v_4 v_5) = 40 = 2(9) + 4(4) + 6$

$f * (v_5 v_6) = 44 = 2(9) + 4(5) + 6$

$f * (v_6 v_7) = 48 = 2(9) + 4(6) + 6$

$f * (v_7 v_8) = 34 = 4(7) + 6$

$f * (v_8 v_0) = 20 = 2(8) + 4$

$f * (u_0 v_0) = 38 = 4(9) + 4(0) + 2$

$f * (u_1 v_1) = 42 = 4(9) + 4(1) + 2$

$f * (u_2 v_2) = 46 = 4(9) + 4(2) + 2$

$f * (u_3 v_3) = 50 = 4(9) + 4(3) + 2$

$f * (u_4 v_4) = 0$

$f * (u_5 v_5) = 4 = 4(5) - 2(9) + 2$

$f * (u_6 v_6) = 8 = 4(6) - 2(9) + 2$

$f * (u_7 v_7) = 12 = 4(7) - 2(9) + 2$

$f * (u_8 v_8) = 52 = 6(8) + 4$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 2 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 2i & , \ i = 8 \end{cases}$

(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 6 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 4i + 6 & , \ i = 7 \\ 2i + 4 & , \ i = 8 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 2 & , \ i = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & , \ i = 4 \\ 4i - 2n + 2 & , \ i = 5, 6, 7 \\ 6i + 4 & , \ i = 8 \end{cases}$

2.) Untuk $f : V(GP_{9,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 53\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 1 = 2(0) + 1$

$f(u_1) = 3 = 2(1) + 1$

$f(u_2) = 5 = 2(2) + 1$

$f(u_3) = 7 = 2(3) + 1$

$f(u_4) = 9 = 2(4) + 1$

$f(u_5) = 11 = 2(5) + 1$

$f(u_6) = 13 = 2(6) + 1$

$f(u_7) = 15 = 2(7) + 1$

$f(u_8) = 17 = 2(8) + 1$

$f(v_0) = 39 = 4(9) + (2(0) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_1) = 41 = 4(9) + (2(1) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_2) = 43 = 4(9) + (2(2) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_3) = 45 = 4(9) + (2(3) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_4) = 47 = 4(9) + (2(4) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_5) = 49 = 4(9) + (2(5) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_6) = 51 = 4(9) + (2(6) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_7) = 53 = 4(9) + (2(7) + 3) \, mod \, 2(9)$

$f(v_8) = 37 = 4(9) + (2(8) + 3) \, mod \, 2(9)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i + 1$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3) mod \, 2n$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f*(u_0u_1) = 4 = 4(0) + 4$

$f*(u_1u_2) = 8 = 4(1) + 4$

$f*(u_2u_3) = 12 = 4(2) + 4$

$f*(u_3u_4) = 16 = 4(3) + 4$

$f*(u_4u_5) = 20 = 4(4) + 4$

$f*(u_5u_6) = 24 = 4(5) + 4$

$f*(u_6u_7) = 28 = 4(6) + 4$

$f*(u_7u_8) = 14 = 4(7) + 4$

$f*(u_8u_0) = 18 = 2(8) + 2$

$f*(v_0v_1) = 26 = 2(9) + 4(0) + 8$

$f*(v_1v_2) = 30 = 2(9) + 4(1) + 8$

$f*(v_2v_3) = 34 = 2(9) + 4(2) + 8$

$f*(v_3v_4) = 38 = 2(9) + 4(3) + 8$

$f*(v_4v_5) = 42 = 2(9) + 4(4) + 8$

$f*(v_5v_6) = 46 = 2(9) + 4(5) + 8$

$f*(v_6v_7) = 50 = 2(9) + 4(6) + 8$

$f*(v_7v_8) = 36 = 3(9) + 7 + 2$

$f*(v_8v_0) = 22 = 2(9) + 4$

$f*(u_0v_0) = 40 = 4(9) + 4(0) + 4$

$f*(u_1v_1) = 44 = 4(9) + 4(1) + 4$

$f*(u_2v_2) = 48 = 4(9) + 4(2) + 4$

$f*(u_3v_3) = 52 = 4(9) + 4(3) + 4$

$f*(u_4v_4) = 2$

$f*(u_5v_5) = 6 = 4(5) - 2(9) + 4$

$f * (u_6 v_6) = 10 = 4(6) - 2(9) + 4$

$f * (u_7 v_7) = 14 = 4(7) - 2(9) + 4$

$f * (u_8 v_8) = 0$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 4 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 2i + 2 & , \ i = 8 \end{cases}$

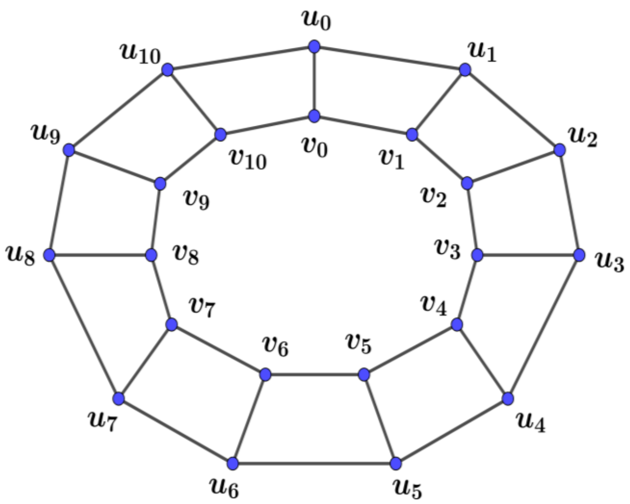
(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 8 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 3n + i + 2 & , \ i = 7 \\ 2n + 4 & , \ i = 8 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 4 & , \ i = 0, 1, 2, 3 \\ 2 & , \ i = 4 \\ 4i - 2n + 4 & , \ i = 5, 6, 7 \\ 0 & , \ i = 8 \end{cases}$

3.1.5 Graf Petersen Diperumum $GP_{11,1}$

Langkah I

Diberikan graf Petersen diperumum $GP_{11,1}$ seperti pada gambar 3.9.



Gambar 3.9 Penotasian titik dan sisi $GP_{11,1}$

Sehingga dari langkah pertama ini kita peroleh graf Petersen diperumum $GP_{(11,1)}$ memiliki himpunan titik $V(GP_{11,1})$ dan himpunan sisi $E(GP_{11,1})$ yaitu:

$V(GP_{11,1}) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$

$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$

$E(GP_{11,1}) = \{u_0u_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6u_7, u_7u_8, u_8u_9, u_9u_{10}, u_{10}u_0$

$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_{10}v_0$

$u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5, u_6v_6, u_7v_7, u_8v_8, u_9v_9, u_{10}v_{10}\}$

Sehingga dapat diketahui bahwa order atau banyaknya titik dari $GP_{11,1}$ adalah $p = 22$ dan ukuran atau banyaknya sisi dari $GP_{11,1}$ adala $q = 33$.

Langkah II

Didefinisikan fungsi $f : V(GP_{11,1}) \to \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2q-1\}$ atau $f : V(GP_{11,1}) \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 65\}$ dengan:

1.) Untuk $f : V(GP_{11,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 64\}$

Label titik untuk $f : V(GP_{11,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 64\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 0$ $\quad f(v_0) = 46$

$f(u_1) = 2$ $\quad f(v_1) = 48$

$f(u_2) = 4$ $\quad f(v_2) = 50$

$f(u_3) = 6$ $\quad f(v_3) = 52$

$f(u_4) = 8$ $\quad f(v_4) = 54$

$f(u_5) = 10$ $\quad f(v_5) = 56$

$f(u_6) = 12$ $f(v_6) = 58$

$f(u_7) = 14$ $f(v_7) = 60$

$f(u_8) = 16$ $f(v_8) = 62$

$f(u_9) = 18$ $f(v_9) = 64$

$f(u_{10}) = 20$ $f(v_{10}) = 44$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{11,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{11,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f*: E\left(GP_{11,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, 8 \cdots, 2(q-1)\}$ atau $f*: E\left(GP_{11,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 64\}$ dengan ketentuan $f*(uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 66)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f*(u_0u_1) = \left(f(u_0) + f(u_1)\right)(mod\ 66) = (0 + 2)(mod\ 66) = 2$

$f*(u_1u_2) = \left(f(u_1) + f(u_2)\right)(mod\ 66) = (2 + 4)(mod\ 66) = 6$

$f*(u_2u_3) = \left(f(u_2) + f(u_3)\right)(mod\ 66) = (4 + 6)(mod\ 66) = 10$

$f*(u_3u_4) = \left(f(u_3) + f(u_4)\right)(mod\ 66) = (6 + 8)(mod\ 66) = 14$

$f*(u_4u_5) = \left(f(u_4) + f(u_5)\right)(mod\ 66) = (8 + 10)(mod\ 66) = 18$

$f*(u_5u_6) = \left(f(u_5) + f(u_6)\right)(mod\ 66) = (10 + 12)(mod\ 66) = 22$

$f*(u_6u_7) = \left(f(u_6) + f(u_7)\right)(mod\ 66) = (12 + 14)(mod\ 66) = 26$

$f*(u_7u_8) = \left(f(u_7) + f(u_8)\right)(mod\ 66) = (14 + 16)(mod\ 66) = 30$

$f*(u_8u_9) = \left(f(u_8) + f(u_9)\right)(mod\ 66) = (16 + 18)(mod\ 66) = 34$

$f*(u_9u_{10}) = \left(f(u_9) + f(u_{10})\right)(mod\ 66) = (18 + 20)(mod\ 66) = 38$

$f*(u_{10}u_0) = \left(f(u_{10}) + f(u_0)\right)(mod\ 66) = (20 + 0)(mod\ 66) = 20$

$f*(v_0v_1) = \left(f(v_0) + f(v_1)\right)(mod\ 66) = (46 + 48)(mod\ 66) = 28$

$f*(v_1v_2) = \big(f(v_1)+f(v_2)\big)(mod\ 66) = (48+50)(mod\ 66) = 32$

$f*(v_2v_3) = \big(f(v_2)+f(v_3)\big)(mod\ 66) = (50+52)(mod\ 66) = 36$

$f*(v_3v_4) = \big(f(v_3)+f(v_4)\big)(mod\ 66) = (52+54)(mod\ 66) = 40$

$f*(v_4v_5) = \big(f(v_4)+f(v_5)\big)(mod\ 66) = (54+56)(mod\ 66) = 44$

$f*(v_5v_6) = \big(f(v_5)+f(v_6)\big)(mod\ 66) = (56+58)(mod\ 66) = 48$

$f*(v_6v_7) = \big(f(v_6)+f(v_7)\big)(mod\ 66) = (58+60)(mod\ 66) = 52$

$f*(v_7v_8) = \big(f(v_7)+f(v_8)\big)(mod\ 66) = (60+62)(mod\ 66) = 56$

$f*(v_8v_9) = \big(f(v_8)+f(v_9)\big)(mod\ 66) = (62+64)(mod\ 66) = 60$

$f*(v_9v_{10}) = \big(f(v_9)+f(v_{10})\big)(mod\ 66) = (64+44)(mod\ 66) = 42$

$f*(v_{10}v_0) = \big(f(v_{10})+f(v_0)\big)(mod\ 66) = (44+46)(mod\ 66) = 24$

$f*(u_0v_0) = \big(f(u_0)+f(v_0)\big)(mod\ 66) = (0+46)(mod\ 66) = 46$

$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1)+f(v_1)\big)(mod\ 66) = (2+48)(mod\ 66) = 50$

$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2)+f(v_2)\big)(mod\ 66) = (4+50)(mod\ 66) = 54$

$f*(u_3v_3) = \big(f(u_3)+f(v_3)\big)(mod\ 66) = (6+52)(mod\ 66) = 58$

$f*(u_4v_4) = \big(f(u_4)+f(v_4)\big)(mod\ 66) = (8+54)(mod\ 66) = 62$

$f*(u_5v_5) = \big(f(u_5)+f(v_5)\big)(mod\ 66) = (10+56)(mod\ 66) = 0$

$f*(u_6v_6) = \big(f(u_6)+f(v_6)\big)(mod\ 66) = (12+58)(mod\ 66) = 4$

$f*(u_7v_7) = \big(f(u_7)+f(v_7)\big)(mod\ 66) = (14+60)(mod\ 66) = 8$

$f*(u_8v_8) = \big(f(u_8)+f(v_8)\big)(mod\ 66) = (16+62)(mod\ 66) = 12$

$f*(u_9v_9) = \big(f(u_8)+f(v_8)\big)(mod\ 66) = (18+64)(mod\ 66) = 16$

$f*(u_{10}v_{10}) = \big(f(u_{10})+f(v_{10})\big)(mod\ 66) = (20+44)(mod\ 66) = 64$

2.) Untuk $f : V\big(GP_{11,1}\big) \rightarrow \{1,3,5,7,\cdots,65\}$

Label titik untuk $f : V(GP_{11,1}) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 65\}$ dimulai dari titik *outer* (u_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$. Kemudian label titik berlanjut dari titik *inner* (v_i) dengan indeks titik terkecil $(i = 0)$ hingga indeks titik terbesar $(i = n - 1)$, dengan:

$f(u_0) = 1$	$f(v_0) = 47$
$f(u_1) = 3$	$f(v_1) = 49$
$f(u_2) = 5$	$f(v_2) = 51$
$f(u_3) = 7$	$f(v_3) = 53$
$f(u_4) = 9$	$f(v_4) = 55$
$f(u_5) = 11$	$f(v_5) = 57$
$f(u_6) = 13$	$f(v_6) = 59$
$f(u_7) = 15$	$f(v_7) = 61$
$f(u_8) = 17$	$f(v_8) = 63$
$f(u_9) = 19$	$f(v_9) = 65$
$f(u_{10}) = 21$	$f(v_{10}) = 45$

Fungsi f adalah fungsi injektif karena berlaku jika untuk setiap $u, v \in V(GP_{11,1})$ sembarang dengan $u \neq v$, maka $f(u) \neq f(v)$, akibatnya setiap anggota himpunan $V(GP_{11,1})$ memiliki label yang berbeda.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f *: E(GP_{11,1}) \to \{0, 2, 4, 6, 8 \cdots, 2(q - 1)\}$ atau $f *: E(GP_{11,1}) \to \{0, 2, 4, 6, \cdots, 64\}$ dengan ketentuan $* (uv) = (f(u) + f(v))\ (mod\ 66)$, sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut:

$f * (u_0u_1) = (f(u_0) + f(u_1))(mod\ 66) = (1 + 3)(mod\ 66) = 4$

$f * (u_1u_2) = (f(u_1) + f(u_2))(mod\ 66) = (3 + 5)(mod\ 66) = 8$

$$f*(u_2u_3) = \big(f(u_2)+f(u_3)\big)(mod\ 66) = (5+7)(mod\ 66) = 12$$

$$f*(u_3u_4) = \big(f(u_3)+f(u_4)\big)(mod\ 66) = (7+9)(mod\ 66) = 16$$

$$f*(u_4u_5) = \big(f(u_4)+f(u_5)\big)(mod\ 66) = (9+11)(mod\ 66) = 20$$

$$f*(u_5u_6) = \big(f(u_5)+f(u_6)\big)(mod\ 66) = (11+13)(mod\ 66) = 24$$

$$f*(u_6u_7) = \big(f(u_6)+f(u_7)\big)(mod\ 66) = (13+15)(mod\ 66) = 28$$

$$f*(u_7u_8) = \big(f(u_7)+f(u_8)\big)(mod\ 66) = (15+17)(mod\ 66) = 32$$

$$f*(u_8u_9) = \big(f(u_8)+f(u_9)\big)(mod\ 66) = (17+19)(mod\ 66) = 36$$

$$f*(u_9u_{10}) = \big(f(u_9)+f(u_{10})\big)(mod\ 66) = (19+21)(mod\ 66) = 40$$

$$f*(u_{10}u_0) = \big(f(u_{10})+f(u_0)\big)(mod\ 66) = (21+1)(mod\ 66) = 22$$

$$f*(v_0v_1) = \big(f(v_0)+f(v_1)\big)(mod\ 66) = (47+49)(mod\ 66) = 30$$

$$f*(v_1v_2) = \big(f(v_1)+f(v_2)\big)(mod\ 66) = (49+51)(mod\ 66) = 34$$

$$f*(v_2v_3) = \big(f(v_2)+f(v_3)\big)(mod\ 66) = (51+53)(mod\ 66) = 38$$

$$f*(v_3v_4) = \big(f(v_3)+f(v_4)\big)(mod\ 66) = (53+55)(mod\ 66) = 42$$

$$f*(v_4v_5) = \big(f(v_4)+f(v_5)\big)(mod\ 66) = (55+57)(mod\ 66) = 46$$

$$f*(v_5v_6) = \big(f(v_5)+f(v_6)\big)(mod\ 66) = (57+59)(mod\ 66) = 50$$

$$f*(v_6v_7) = \big(f(v_6)+f(v_7)\big)(mod\ 66) = (59+61)(mod\ 66) = 54$$

$$f*(v_7v_8) = \big(f(v_7)+f(v_8)\big)(mod\ 66) = (61+63)(mod\ 66) = 58$$

$$f*(v_8v_9) = \big(f(v_8)+f(v_9)\big)(mod\ 66) = (63+65)(mod\ 66) = 62$$

$$f*(v_9v_{10}) = \big(f(v_9)+f(v_{10})\big)(mod\ 66) = (65+45)(mod\ 66) = 44$$

$$f*(v_{10}v_0) = \big(f(v_{10})+f(v_0)\big)(mod\ 66) = (45+47)(mod\ 66) = 26$$

$$f*(u_0v_0) = \big(f(u_0)+f(v_0)\big)(mod\ 66) = (1+47)(mod\ 66) = 48$$

$$f*(u_1v_1) = \big(f(u_1)+f(v_1)\big)(mod\ 66) = (3+49)(mod\ 66) = 52$$

$f*(u_2v_2) = \big(f(u_2) + f(v_2)\big)(mod\ 66) = (5 + 51)(mod\ 66) = 56$

$f*(u_3v_3) = \big(f(u_3) + f(v_3)\big)(mod\ 66) = (7 + 53)(mod\ 66) = 60$

$f*(u_4v_4) = \big(f(u_4) + f(v_4)\big)(mod\ 66) = (9 + 55)(mod\ 66) = 64$

$f*(u_5v_5) = \big(f(u_5) + f(v_5)\big)(mod\ 66) = (11 + 57)(mod\ 66) = 2$

$f*(u_6v_6) = \big(f(u_6) + f(v_6)\big)(mod\ 66) = (13 + 59)(mod\ 66) = 6$

$f*(u_7v_7) = \big(f(u_7) + f(v_7)\big)(mod\ 66) = (15 + 61)(mod\ 66) = 10$

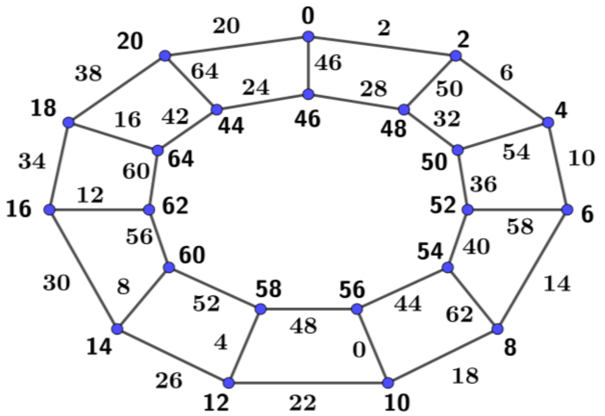
$f*(u_8v_8) = \big(f(u_8) + f(v_8)\big)(mod\ 66) = (17 + 63)(mod\ 66) = 14$

$f*(u_9v_9) = \big(f(u_8) + f(v_8)\big)(mod\ 66) = (19 + 65)(mod\ 66) = 18$

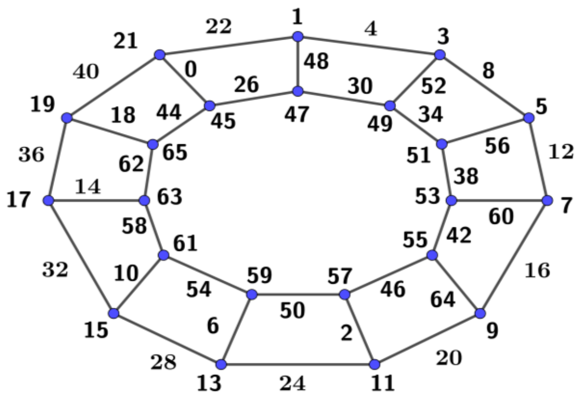
$f*(u_{10}v_{10}) = \big(f(u_{10}) + f(v_{10})\big)(mod\ 66) = (21 + 45)(mod\ 66) = 0$

Langkah III

Memberikan label pada masing-masing titik dan sisi pada graf Petersen diperumum $GP_{11,1}$ dengan hasil perhitungan dari langkah II, sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 3.10.



(a)



(b)

Gambar 3.10 Pelabelan harmonis sejati genap $GP_{11,1}$

Langkah IV

Dari fungsi pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{11,1}$, maka diperoleh pola sebagai berikut:

1.) Untuk $f : V\big(GP_{11,1}\big) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 64\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 0 = 2(0)$

$f(u_1) = 2 = 2(1)$

$f(u_2) = 4 = 2(2)$

$f(u_3) = 6 = 2(3)$

$f(u_4) = 8 = 2(4)$

$f(u_5) = 10 = 2(5)$

$f(u_6) = 12 = 2(6)$

$f(u_7) = 14 = 2(7)$

$f(u_8) = 16 = 2(8)$

$f(u_9) = 18 = 2(9)$

$f(u_{10}) = 20 = 2(10)$

$f(v_0) = 46 = 4(11) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_1) = 48 = 4(11) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_2) = 50 = 4(11) + (2(2) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_3) = 52 = 4(11) + (2(3) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_4) = 54 = 4(11) + (2(4) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_5) = 56 = 4(11) + (2(5) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_6) = 58 = 4(11) + (2(6) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_7) = 60 = 4(11) + (2(7) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_8) = 62 = 4(11) + (2(8) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_9) = 64 = 4(11) + (2(9) + 2)\ mod\ 2(11)$

$f(v_{10}) = 44 = 4(11) + (2(10) + 2)\ mod\ 2(11)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0u_1) = 2 = 4(0) + 2$

$f * (u_1u_2) = 6 = 4(1) + 2$

$f * (u_2u_3) = 10 = 4(2) + 2$

$f * (u_3u_4) = 14 = 4(3) + 2$

$f * (u_4u_5) = 18 = 4(4) + 2$

$f * (u_5u_6) = 22 = 4(5) + 2$

$f * (u_6u_7) = 26 = 4(6) + 2$

$f * (u_7u_8) = 30 = 4(7) + 2$

$f * (u_8u_9) = 34 = 4(8) + 2$

$f * (u_9u_{10}) = 38 = 4(9) + 2$

$f * (u_{10}u_0) = 20 = 2(10)$

$f * (v_0v_1) = 28 = 2(11) + 4(0) + 6$

$f * (v_1v_2) = 32 = 2(11) + 4(1) + 6$

$f * (v_2v_3) = 36 = 2(11) + 4(2) + 6$

$f * (v_3v_4) = 40 = 2(11) + 4(3) + 6$

$f * (v_4v_5) = 44 = 2(11) + 4(4) + 6$

$f * (v_5v_6) = 48 = 2(11) + 4(5) + 6$

$f * (v_6v_7) = 52 = 2(11) + 4(6) + 6$

$f * (v_7v_8) = 56 = 2(11) + 4(7) + 6$

$f * (v_8v_9) = 60 = 2(11) + 4(8) + 6$

$f * (v_9v_{10}) = 42 = 4(9) + 6$

$f * (v_{10}v_0) = 24 = 2(10) + 4$

$f * (u_0v_0) = 46 = 4(11) + 4(0) + 2$

$f * (u_1v_1) = 50 = 4(11) + 4(1) + 2$

$f * (u_2v_2) = 54 = 4(11) + 4(2) + 2$

$f * (u_3v_3) = 58 = 4(11) + 4(3) + 2$

$f * (u_4v_4) = 62 = 4(11) + 4(4) + 2$

$f * (u_5v_5) = 0$

$f * (u_6v_6) = 4 = 4(6) - 2(11) + 2$

$f * (u_7v_7) = 8 = 4(7) - 2(11) + 2$

$f * (u_8v_8) = 12 = 4(8) - 2(11) + 2$

$f * (u_9v_9) = 16 = 4(9) - 2(11) + 2$

$f*(u_{10}v_{10}) = 64 = 6(10) + 4$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i+2 & , \ i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \\ 2i & , \ i = 10 \end{cases}$

(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n+4i+6 & , \ i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 \\ 4i+6 & , \ i = 9 \\ 2i+4 & , \ i = 10 \end{cases}$

(iii) $f(u_iv_i) = \begin{cases} 4n+4i+2 & , \ i = 0,1,2,3,4 \\ 0 & , \ i = 5 \\ 4i-2n+2 & , \ i = 6,7,8,9 \\ 6i+4 & , \ i = 10 \end{cases}$

2.) Untuk $f : V(GP_{11,1}) \to \{1,3,5,7,\cdots,65\}$

Untuk indeks titik yaitu:

$f(u_0) = 1 = 2(0) + 1$

$f(u_1) = 3 = 2(1) + 1$

$f(u_2) = 5 = 2(2) + 1$

$f(u_3) = 7 = 2(3) + 1$

$f(u_4) = 9 = 2(4) + 1$

$f(u_5) = 11 = 2(5) + 1$

$f(u_6) = 13 = 2(6) + 1$

$f(u_7) = 15 = 2(7) + 1$

$f(u_8) = 17 = 2(8) + 1$

$f(u_9) = 19 = 2(9) + 1$

$f(u_{10}) = 21 = 2(10) + 1$

$f(v_0) = 47 = 4(11) + (2(0) + 3) \ mod \ 2(11)$

$f(v_1) = 49 = 4(11) + (2(1) + 3) \ mod \ 2(11)$

$f(v_2) = 51 = 4(11) + (2(2) + 3) \ mod \ 2(11)$

$f(v_3) = 53 = 4(11) + (2(3) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_4) = 55 = 4(11) + (2(4) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_5) = 57 = 4(11) + (2(5) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_6) = 59 = 4(11) + (2(6) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_7) = 61 = 4(11) + (2(7) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_8) = 63 = 4(11) + (2(8) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_9) = 65 = 4(11) + (2(9) + 3)\ mod\ 2(11)$

$f(v_{10}) = 45 = 4(11) + (2(10) + 3)\ mod\ 2(11)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_i) = 2i + 1$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

Untuk indeks sisi yaitu:

$f * (u_0u_1) = 4 = 4(0) + 4$

$f * (u_1u_2) = 8 = 4(1) + 4$

$f * (u_2u_3) = 12 = 4(2) + 4$

$f * (u_3u_4) = 16 = 4(3) + 4$

$f * (u_4u_5) = 20 = 4(4) + 4$

$f * (u_5u_6) = 24 = 4(5) + 4$

$f * (u_6u_7) = 28 = 4(6) + 4$

$f * (u_7u_8) = 32 = 4(7) + 4$

$f * (u_8u_9) = 36 = 4(8) + 4$

$f * (u_9u_{10}) = 40 = 4(9) + 4$

$f * (u_{10}u_0) = 22 = 2(10) + 2$

$f * (v_0v_1) = 30 = 2(11) + 4(0) + 8$

$f*(v_1v_2) = 34 = 2(11) + 4(1) + 8$

$f*(v_2v_3) = 38 = 2(11) + 4(2) + 8$

$f*(v_3v_4) = 42 = 2(11) + 4(3) + 8$

$f*(v_4v_5) = 46 = 2(11) + 4(4) + 8$

$f*(v_5v_6) = 50 = 2(11) + 4(5) + 8$

$f*(v_6v_7) = 54 = 2(11) + 4(6) + 8$

$f*(v_7v_8) = 58 = 2(11) + 4(7) + 8$

$f*(v_8v_9) = 62 = 2(11) + 4(8) + 8$

$f*(v_9v_{10}) = 44 = 3(11) + 9 + 2$

$f*(v_{10}v_0) = 26 = 2(11) + 4$

$f*(u_0v_0) = 48 = 4(11) + 4(0) + 4$

$f*(u_1v_1) = 52 = 4(11) + 4(1) + 4$

$f*(u_2v_2) = 56 = 4(11) + 4(2) + 4$

$f*(u_3v_3) = 60 = 4(11) + 4(3) + 4$

$f*(u_4v_4) = 64 = 4(11) + 4(4) + 4$

$f*(u_5v_5) = 2$

$f*(u_6v_6) = 6 = 4(6) - 2(11) + 4$

$f*(u_7v_7) = 10 = 4(7) - 2(11) + 4$

$f*(u_8v_8) = 14 = 4(8) - 2(11) + 4$

$f*(u_9v_9) = 18 = 4(9) - 2(11) + 4$

$f*(u_{10}v_{10}) = 0$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 4 & , \ i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \\ 2i + 2 & , \ i = 10 \end{cases}$

(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 8 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 3n + i + 2 & , \ i = 9 \\ 2n + 4 & , \ i = 10 \end{cases}$

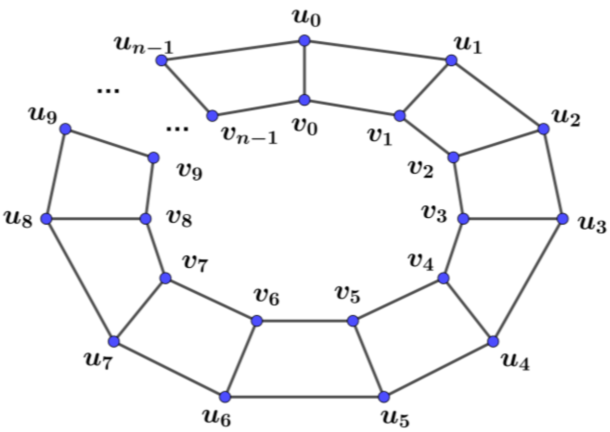
(iii) $f(u_i v_i) \quad = \begin{cases} 4n + 4i + 4 & , \ i = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 2 & , \ i = 5 \\ 4i - 2n + 4 & , \ i = 6, 7, 8, 9 \\ 0 & , \ i = 10 \end{cases}$

Teorema

Graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$ memiliki pelabelan harmonis genap sejati untuk n ganjil dan $n \geq 3$.

Bukti:

Misalkan diberikan suatu graf $GP_{n,1}$ untuk n ganjil dan $n \geq 3$ sembarang seperti pada gambar 2.15.



Gambar 3.11 Graf $GP_{n,1}$

Didefinisikan $f: V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{0, 1, 2, \cdots, 2q - 1\}$. Diketahui $q = 3n$, maka $f: V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{0, 1, 2, \cdots, 6n - 1\}$ yang terbagi dalam dua kasus yaitu:

a.) Untuk $f : V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n - 2\}$, dengan aturan:

(i) $f(u_i) = 2i \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n - 1$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2)mod\ 2n \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n-1$

b.) Untuk $f : V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \ \cdots, 6n - 1\}$, dengan aturan:

(i) $f(u_i) = 2i + 1 \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n-1$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3)mod\ 2n \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n-1$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f\left(V\left(GP_{n,1}\right)\right)$ adalah injektif yaitu:

a.) Untuk $f : V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n - 2\}$

Ambil sembarang u_i dan v_i titik di $GP_{n,1}$ sedemikian sehingga $u_i \neq v_j$.

Akan dibuktikan $f(u_i) \neq f\left(v_j\right)$.

Karena $u_i \neq v_j$, maka:

$f(u_i) = 2i \neq 4n + (2i + 2)mod\ 2n = f\left(v_j\right)$

Dengan demikian terbukti bahwa $f(u_i) \neq f\left(v_j\right)$.

b.) Untuk $f : V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 6n - 1\}$, dengan aturan:

Ambil sembarang u_i dan v_i titik di $GP_{n,1}$ sedemikian sehingga $u_i \neq v_j$.

Akan dibuktikan $f(u_i) \neq f\left(v_j\right)$.

Karena $u_i \neq v_j$, maka:

$f(u_i) = 2i + 1 \neq 4n + (2i + 3)mod\ 2n = f\left(v_j\right)$

Dengan demikian terbukti bahwa $f(u_i) \neq f\left(v_j\right)$.

Berdasarkan (a) dan (b) maka diperoleh bahwa $f\left(V\left(GP_{n,1}\right)\right)$ adalah injektif.

Kemudian didefinisikan $f *: E(GP_{n,1}) \rightarrow \{\ 0, 2, 4, \cdots, 2(q - 1)\}$ dengan $f *(uv) = (f(u) + f(v))(mod\ 2q)$. Diketahui $q = 3n$, maka $f *: E(GP_{n,1}) \rightarrow \{\ 0, 2, 4, \cdots, 6n - 2\}$ dengan $f * (uv) = (f(u) + f(v))(mod\ 6n)$ yang terbagi dalam dua kasus:

a.) Menggunakan aturan dari $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n-2\}$, maka diperoleh label sisi dengan aturan:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i+2 & , \ 0 \le i \le n-2 \\ 2i & , \ i = n-1 \end{cases}$

(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n+4i+6 & , \ 0 \le i \le n-3 \\ 4i+6 & , \ i = n-2 \\ 2i+4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

(iii) $f(u_iv_i) = \begin{cases} 4n+4i+2 & , \ 0 \le i \le \frac{n-3}{2} \\ 0 & , \ i = \frac{n-1}{2} \\ 4i-2n+2 & , \ \frac{n+1}{2} \le i \le n-2 \\ 6i+4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

b.) Menggunakan aturan dari $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 6n-1\}$, maka diperoleh label sisi dengan aturan:

(i) $f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4i+4 & , \ 0 \le i \le n-2 \\ 2i+2 & , \ i = n-1 \end{cases}$

(ii) $f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2n+4i+8 & , \ 0 \le i \le n-3 \\ 3n+i+2 & , \ i = n-2 \\ 2n+4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

(iii) $f(u_iv_i) = \begin{cases} 4n+4i+4 & , \ 0 \le i \le \frac{n-3}{2} \\ 2 & , \ i = \frac{n-1}{2} \\ 4i-2n+4 & , \ \frac{n+1}{2} \le i \le n-2 \\ 0 & , \ i = n-1 \end{cases}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f * \left(E(GP_{n,1})\right)$ adalah bijektif yaitu:

1.) Akan ditunjukkan bahwa $f * \left(E(GP_{n,1})\right)$ adalah ijektif.

(A) Menggunakan aturan dari $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n-2\}$,

(i) ambil u_iu_{i+1} dan u_ju_{j+1} sisi di $GP_{n,1}$ dengan $f(u_iu_{i+1}) = f(u_ju_{j+1})$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $u_iu_{i+1} = u_ju_{j+1}$.

(a) Untuk $0 \le i \le n-2$ dan $0 \le j \le n-2$

Karena $f(u_iu_{i+1}) = f(u_ju_{j+1})$,

maka: $4i + 2 = 4j + 2$

$4i = 4j$

$i = j$

Jadi, $u_iu_{i+1} = u_ju_{j+1}$

(b) Untuk $i = n - 1$ dan $j = n - 1$

Karena $f(u_iu_{i+1}) = f(u_ju_{j+1})$,

maka: $2i = 2j$

$i = j$

Jadi, $u_iu_{i+1} = u_ju_{j+1}$

(ii) ambil v_iv_{i+1} dan v_jv_{j+1} sisi di $GP_{n,1}$ dengan $f(v_iv_{i+1}) = f(v_jv_{j+1})$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $v_iv_{i+1} = v_jv_{j+1}$.

(a) Untuk $0 \leq i \leq n - 3$ dan $0 \leq j \leq n - 3$

Karena $f(v_iv_{i+1}) = f(v_jv_{j+1})$,

maka: $2n + 4i + 6 = 2n + 4j + 6$

$2n + 4i = 2n + 4j$

$4i = 4j$

$i = j$

Jadi, $v_iv_{i+1} = v_jv_{j+1}$

(b) Untuk $i = n - 2$ dan $j = n - 2$

Karena $f(v_iv_{i+1}) = f(u_ju_{j+1})$,

maka: $4i + 6 = 4j + 6$

$4i = 4j$

$i = j$

Jadi, $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

(c) Untuk $i = n - 1$ dan $j = n - 1$

Karena $f(v_i v_{i+1}) = f\left(u_j u_{j+1}\right)$,

maka: $2i + 4 = 2i + 4$

$2i = 2j$

$i = j$

Jadi, $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

(iii) ambil $u_i v_i$ dan $u_j v_j$ sisi di $GP_{n,1}$ dengan $f(u_i v_i) = f\left(u_j v_j\right)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $u_i v_i = u_j v_j$.

(a) Untuk $0 \le i \le \frac{n-3}{2}$dan $0 \le j \le \frac{n-3}{2}$

Karena $f(u_i v_i) = f\left(u_j v_j\right)$,

maka: $4n + 4i + 2 = 4n + 4i + 2$

$4n + 4i = 4n + 4j$

$4i = 4j$

$i = j$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

(b) Untuk $i = \frac{n-1}{2}$ dan $j = \frac{n-1}{2}$

Karena $f(u_i v_i) = f\left(u_j v_j\right)$,

maka: $0 = 0$

Karena fungsi konstan maka nilai kedua fungsi tersebut adalah sama sehingga $= j$.

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

(c) Untuk $\frac{n-1}{2} \leq i \leq n-2$ dan $\frac{n-1}{2} \leq j \leq n-2$

Karena $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$,

maka: $4i - 2n + 2 \ = 4j - 2n + 2$

$$4i - 2n = 4j - 2n$$

$$4i = 4j$$

$$i = j$$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

(d) Untuk $i = n - 1$ dan $i = n - 1$

Karena $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$,

maka: $6i + 4 \quad = 6i + 4$

$$6i = 6j$$

$$i = j$$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii) maka label sisi dari label titik untuk $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n - 2\}$ adalah injektif.

(B) Menggunakan aturan dari $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 6n - 1\}$,

(i) ambil $u_i u_{i+1}$ dan $u_j u_{j+1}$ sisi di $GP_{n,1}$ dengan $f(u_i u_{i+1}) = f(u_j u_{j+1})$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $u_i u_{i+1} = u_j u_{j+1}$.

(a) Untuk $0 \leq i \leq n - 2$ dan $0 \leq j \leq n - 2$

Karena $f(u_i u_{i+1}) = f(u_j u_{j+1})$,

maka: $4i + 4 = 4j + 4$

$$4i = 4j$$

$$i = j$$

Jadi, $u_i u_{i+1} = u_j u_{j+1}$

(b) Untuk $i = n - 1$ dan $j = n - 1$

Karena $f(u_i u_{i+1}) = f(u_j u_{j+1})$,

maka: $2i + 2 = 2j + 2$

$$2i = 2j$$

$$i = j$$

Jadi, $u_i u_{i+1} = u_j u_{j+1}$

(ii) ambil $v_i v_{i+1}$ dan $v_j v_{j+1}$ sisi di $GP_{n,1}$ dengan $f(v_i v_{i+1}) = f(v_j v_{j+1})$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$.

(a) Untuk $0 \le i \le n - 3$ dan $0 \le j \le n - 3$

Karena $f(v_i v_{i+1}) = f(v_j v_{j+1})$,

maka: $2n + 4i + 8 = 2n + 4j + 8$

$$2n + 4i = 2n + 4j$$

$$4i = 4j$$

$$i = j$$

Jadi, $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

(b) Untuk $i = n - 2$ dan $j = n - 2$

Karena $f(v_i v_{i+1}) = f(u_j u_{j+1})$,

maka: $3n + i + 2 = 3n + j + 2$

$$3n + i = 3n + i$$

$$i = j$$

Jadi, $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

(c) Untuk $i = n - 1$ dan $j = n - 1$

Karena $f(v_i v_{i+1}) = f(u_j u_{j+1})$,

maka: $2n + 4 = 2n + 4$

Karena fungsi konstan maka nilai kedua fungsi tersebut adalah sama

sehingga $i = j$

Jadi, $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$

(iii) ambil $u_i v_i$ dan $u_j v_j$ sisi di $GP_{n,1}$ dengan $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $u_i v_i = u_j v_j$.

(a) Untuk $0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$dan $0 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$

Karena $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$,

maka: $4n + 4i + 4 = 4n + 4i + 4$

$$4n + 4i = 4n + 4j$$

$$4i = 4j$$

$$i = j$$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

(b) Untuk $i = \frac{n-1}{2}$ dan $j = \frac{n-1}{2}$

Karena $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$,

maka: $2 = 2$

Karena fungsi konstan maka nilai kedua fungsi tersebut adalah sama

sehingga $i = j$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

(c) Untuk $\frac{n+1}{2} \leq i \leq n - 2$ dan $\frac{n+1}{2} \leq j \leq n - 2$

Karena $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$,

maka: $4i - 2n + 4 = 4j - 2n + 4$

$$4i - 2n = 4j - 2n$$

$$4i = 4j$$

$$i = j$$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

(d) Untuk $i = n - 1$ dan $i = n - 1$

Karena $f(u_i v_i) = f(u_j v_j)$,

maka: $0 = 0$

Karena fungsi konstan maka nilai kedua fungsi tersebut adalah sama sehingga $i = j$

Jadi, $u_i v_i = u_j v_j$

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii) maka label sisi dari label titik untuk $f : V(GP_{n,1}) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 6n - 1\}$ adalah injektif.

Berdasarkan (A) dan (B) maka diperoleh $f * \left(E(GP_{n,1})\right)$ adalah injektif.

2.) Akan ditunjukkan bahwa $f * \left(E(GP_{n,1})\right)$ adalah surjektif.

Akan ditunjukkan bahwa $f * \left(E(GP_{n,1})\right)$dipetakan ke $\{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n - 2\}$. Menurut definisi pelabelan bahwa untuk setiap elemen di $E(GP_{n,1})$ akan dipetakan pada bilangan bulat tak negatif sebanyak q atau banyaknya sisi di $GP_{n,1}$, maka banyaknya prapeta dan peta adalah sama. Diketahui q di $E(GP_{n,1})$ adalah sebanyak $3n$ maka $0 \leq f * \left(E(GP_{n,1})\right) \leq 2(q - 1)$ atau $0 \leq f * \left(E(GP_{n,1})\right) \leq 6n - 2$. Artinya $f * \left(E(GP_{n,1})\right)$dipetakan ke $\{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n - 2\}$. Karena banyaknya sisi di $GP_{n,1}$adalah sama dengan banyaknya anggota dari

$\{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n-2\}$ dan telah terbukti bahwa $f * \left(E\left(GP_{n,1}\right)\right)$ adalah injektif maka sudah pasti $f * \left(E\left(GP_{n,1}\right)\right)$ adalah surjektif.

Dengan demikian berdasarkan (1) dan (2) maka diperoleh bahwa $f * \left(E\left(GP_{n,1}\right)\right)$ adalah bijektif artinya terbukti bahwa $GP_{n,1}$ memiliki pelabelan harmonis genap sejati untuk n ganjil dan $n \geq 3$.

3.2 Rumus Umum Untuk Pelabelan Harmonis Sejati Genap pada Graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$

Berikut adalah rumus umum untuk pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah sebagai berikut:

1.) Untuk $f : V\left(GP_{n,1}\right) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 2q-2\}$ diperoleh tabel pola label titik sebagai berikut:

Tabel 3.1 Pola pelabelan titik graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$

n	i	$f(u_i)$	$f(v_i)$
3	1	$0 = 2(0)$	$14 = 4(3) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(3)$
	2	$2 = 2(1)$	$16 = 4(3) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(3)$
	3	$4 = 2(2)$	$12 = 4(3) + (2(2) + 2) mod\ 2(3)$
5	0	$0 = 2(0)$	$22 = 4(5) + (2(0) + 2) mod\ 2(5)$
	1	$2 = 2(1)$	$24 = 4(5) + (2(1) + 2) mod\ 2(5)$
	2	$4 = 2(2)$	$26 = 4(5) + (2(2) + 2) mod\ 2(5)$
	3	$6 = 2(3)$	$28 = 4(5) + (2(3) + 2) mod\ 2(5)$
	4	$8 = 2(4)$	$20 = 4(5) + (2(4) + 2) mod\ 2(5)$
7	0	$0 = 2(0)$	$30 = 4(7) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(7)$
	1	$2 = 2(1)$	$32 = 4(7) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(7)$
	2	$4 = 2(2)$	$34 = 4(7) + (2(2) + 2)\ mod\ 2(7)$
	3	$6 = 2(3)$	$36 = 4(7) + (2(3) + 2)\ mod\ 2(7)$
	4	$8 = 2(4)$	$38 = 4(7) + (2(4) + 2)\ mod\ 2(7)$
	5	$10 = 2(5)$	$40 = 4(7) + (2(5) + 2)\ mod\ 2(7)$
	6	$12 = 2(6)$	$28 = 4(7) + (2(6) + 2)\ mod\ 2(7)$
9	0	$0 = 2(0)$	$38 = 4(9) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(9)$
	1	$2 = 2(1)$	$40 = 4(9) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(9)$
	2	$4 = 2(2)$	$42 = 4(9) + (2(2) + 2)\ mod\ 2(9)$
	3	$6 = 2(3)$	$44 = 4(9) + (2(3) + 2)\ mod\ 2(9)$
	4	$8 = 2(4)$	$46 = 4(9) + (2(4) + 2)\ mod\ 2(9)$

	5	$10 = 2(5)$	$48 = 4(9) + (2(5) + 2)\ mod\ 2(9)$
	6	$12 = 2(6)$	$50 = 4(9) + (2(6) + 2)\ mod\ 2(9)$
	7	$14 = 2(7)$	$52 = 4(9) + (2(7) + 2)\ mod\ 2(9)$
	8	$16 = 2(8)$	$36 = 4(9) + (2(8) + 2)\ mod\ 2(9)$
11	0	$0 = 2(0)$	$46 = 4(11) + (2(0) + 2)\ mod\ 2(11)$
	1	$2 = 2(1)$	$48 = 4(11) + (2(1) + 2)\ mod\ 2(11)$
	2	$4 = 2(2)$	$50 = 4(11) + (2(2) + 2)\ mod\ 2(11)$
	3	$6 = 2(3)$	$52 = 4(11) + (2(3) + 2)\ mod\ 2(11)$
	4	$8 = 2(4)$	$54 = 4(11) + (2(4) + 2)\ mod\ 2(11)$
	5	$10 = 2(5)$	$56 = 4(11) + (2(5) + 2)\ mod\ 2(11)$
	6	$12 = 2(6)$	$58 = 4(11) + (2(6) + 2)\ mod\ 2(11)$
	7	$14 = 2(7)$	$60 = 4(11) + (2(7) + 2)\ mod\ 2(11)$
	8	$16 = 2(8)$	$62 = 4(11) + (2(8) + 2)\ mod\ 2(11)$
	9	$18 = 2(9)$	$64 = 4(11) + (2(9) + 2)\ mod\ 2(11)$
	10	$20 = 2(10)$	$44 = 4(11) + (2(10) + 2)\ mod\ 2(11)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	i	$2i$	$4n + (2i + 2) mod\ 2n$

Keterangan:

$n =$ bilangan tak negatif dari notasi $GP_{n,1}$.

$i =$ indeks pada graf Petersen diperumum dimulai dari 0 sampai dengan $n - 1$.

Berdasarkan tabel 3.1 diperoleh rumus umum label titik adalah:

(i) $f(u_i) = 2i$, $i = 0,1,2,3, \cdots, n - 1$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3, \cdots, n - 1$

Selanjutya, dengan menggunakan rumus umum label titik tersebut diperoleh tabel pola label sisi sebagai berikut:

Tabel 3.2 Pola pelabelan sisi graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$

n	i	$f(u_i u_{i+1})$	$f(v_i v_{i+1})$	$f(u_i v_i)$
3	0	$2 = 4(0) + 2$	$12 = 2(3) + 4(0) + 6$	$14 = 4(5) + 4(0) + 2$
	1	$6 = 4(1) + 2$	$10 = 4(1) + 6$	0
	2	$4 = 2(2)$	$8 = 2(2) + 4$	$16 = 6(2) + 4$
5	0	$2 = 4(0) + 2$	$16 = 2(5) + 4(0) + 6$	$22 = 4(5) + 4(0) + 2$
	1	$6 = 4(1) + 2$	$20 = 2(5) + 4(1) + 6$	$26 = 4(5) + 4(0) + 2$
	2	$10 = 4(2) + 2$	$24 = 2(5) + 4(2) + 6$	0
	3	$14 = 4(3) + 2$	$18 = 4(3) + 6$	$4 = 4(3) - 2(5) + 2$
	4	$8 = 2(4)$	$12 = 2(4) + 4$	$28 = 6(4) + 4$
7	0	$2 = 4(0) + 2$	$20 = 2(7) + 4(0) + 6$	$30 = 4(7) + 4(0) + 2$
	1	$6 = 4(1) + 2$	$24 = 2(7) + 4(1) + 6$	$34 = 4(7) + 4(1) + 2$
	2	$10 = 4(2) + 2$	$28 = 2(7) + 4(2) + 6$	$38 = 4(7) + 4(2) + 2$
	3	$14 = 4(3) + 2$	$32 = 2(7) + 4(3) + 6$	0

	4 5 6	$18 = 4(4) + 2$ $22 = 4(5) + 2$ $12 = 2(6)$	$36 = 2(7) + 4(4) + 6$ $26 = 4(5) + 6$ $16 = 2(6) + 4$	$4 = 4(4) - 2(7) + 2$ $8 = 4(5) - 2(7) + 2$ $40 = 6(6) + 4$
9	0 1 2 3 4 5 6 7 8	$2 = 4(0) + 2$ $6 = 4(1) + 2$ $10 = 4(2) + 2$ $14 = 4(3) + 2$ $18 = 4(4) + 2$ $22 = 4(5) + 2$ $26 = 4(6) + 2$ $30 = 4(7) + 2$ $16 = 2(8)$	$24 = 2(9) + 4(0) + 6$ $28 = 2(9) + 4(1) + 6$ $32 = 2(9) + 4(2) + 6$ $36 = 2(9) + 4(3) + 6$ $40 = 2(9) + 4(4) + 6$ $44 = 2(9) + 4(5) + 6$ $48 = 2(9) + 4(6) + 6$ $34 = 4(7) + 6$ $20 = 2(8) + 4$	$38 = 4(9) + 4(0) + 2$ $42 = 4(9) + 4(1) + 2$ $46 = 4(9) + 4(2) + 2$ $50 = 4(9) + 4(3) + 2$ 0 $4 = 4(5) - 2(9) + 2$ $8 = 4(6) - 2(9) + 2$ $12 = 4(7) - 2(9) + 2$ $52 = 6(8) + 4$
11	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	$2 = 4(0) + 2$ $6 = 4(1) + 2$ $10 = 4(2) + 2$ $14 = 4(3) + 2$ $18 = 4(4) + 2$ $22 = 4(5) + 2$ $26 = 4(6) + 2$ $30 = 4(7) + 2$ $34 = 4(8) + 2$ $38 = 4(9) + 2$ $20 = 2(10)$	$28 = 2(11) + 4(0) + 6$ $32 = 2(11) + 4(1) + 6$ $36 = 2(11) + 4(2) + 6$ $40 = 2(11) + 4(3) + 6$ $44 = 2(11) + 4(4) + 6$ $48 = 2(11) + 4(5) + 6$ $52 = 2(11) + 4(6) + 6$ $56 = 2(11) + 4(7) + 6$ $60 = 2(11) + 4(8) + 6$ $42 = 4(9) + 6$ $24 = 2(10) + 4$	$46 = 4(11) + 4(0) + 2$ $50 = 4(11) + 4(1) + 2$ $54 = 4(11) + 4(2) + 2$ $58 = 4(11) + 4(3) + 2$ $62 = 4(11) + 4(4) + 2$ 0 $4 = 4(6) - 2(11) + 2$ $8 = 4(7) - 2(11) + 2$ $12 = 4(8) - 2(11) + 2$ $16 = 4(9) - 2(11) + 2$ $64 = 6(10) + 4$
…	…	…	…	
n	0 … $\frac{n-3}{2}$ $\frac{n-1}{2}$ $\frac{n+1}{2}$ … $n-3$ $n-2$ $n-1$	⋮ $4i + 6$ ⋮ $2i$	⋮ $2n + 4i + 6$ ⋮ $4i + 6$ $2i + 4$	⋮ $4n + 4i + 2$ ⋮ 0 ⋮ $4n + 4i + 2$ ⋮ $6i + 4$

Keterangan:

$n =$ bilangan tak negatif dari notasi $GP_{n,1}$.

$i =$ indeks pada graf Petersen diperumum dimulai dari 0 sampai dengan $n - 1$.

Berdasarkan tabel 3.2 diperoleh rumus umum label sisi adalah:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 2 & , \ 0 \le i \le n - 2 \\ 2i & , \ i = n - 1 \end{cases}$

(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 6 & , \ 0 \le i \le n-3 \\ 4i + 6 & , \ i = n-2 \\ 2i + 4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 2 & , \ 0 \le i \le \frac{n-3}{2} \\ 0 & , \ i = \frac{n-1}{2} \\ 4i - 2n + 2 & , \ \frac{n+1}{2} \le i \le n-2 \\ 6i + 4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

2.) Untuk $f : V(GP_{n,1}) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots, 2q-1\}$ diperoleh tabel pola label titik sebagai berikut:

Tabel 3.3 Pola pelabelan titik graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$

n	i	$f(u_i)$	$f(v_i)$
3	1 2 3	$1 = 2(0) + 1$ $3 = 2(1) + 1$ $5 = 2(2) + 1$	$15 = 4(3) + (2(0) + 3)\ mod\ 2(3)$ $17 = 4(3) + (2(1) + 3)\ mod\ 2(3)$ $13 = 4(3) + (2(2) + 3) mod\ 2(3)$
5	0 1 2 3 4	$1 = 2(0) + 1$ $3 = 2(1) + 1$ $5 = 2(2) + 1$ $7 = 2(3) + 1$ $9 = 2(4) + 1$	$23 = 4(5) + (2(0) + 3)\ mod\ 2(5)$ $25 = 4(5) + (2(1) + 3)\ mod\ 2(5)$ $27 = 4(5) + (2(2) + 3)\ mod\ 2(5)$ $29 = 4(5) + (2(3) + 3)\ mod\ 2(5)$ $21 = 4(5) + (2(4) + 3)\ mod\ 2(5)$
7	0 1 2 3 4 5 6	$1 = 2(0) + 1$ $3 = 2(1) + 1$ $5 = 2(2) + 1$ $7 = 2(3) + 1$ $9 = 2(4) + 1$ $11 = 2(5) + 1$ $13 = 2(6) + 1$	$31 = 4(7) + (2(0) + 3)\ mod\ 2(7)$ $33 = 4(7) + (2(1) + 3)\ mod\ 2(7)$ $35 = 4(7) + (2(2) + 3)\ mod\ 2(7)$ $37 = 4(7) + (2(3) + 3)\ mod\ 2(7)$ $39 = 4(7) + (2(4) + 3)\ mod\ 2(7)$ $41 = 4(7) + (2(5) + 3)\ mod\ 2(7)$ $29 = 4(7) + (2(6) + 3)\ mod\ 2(7)$
9	0 1 2 3 4 5 6 7 8	$1 = 2(0) + 1$ $3 = 2(1) + 1$ $5 = 2(2) + 1$ $7 = 2(3) + 1$ $9 = 2(4) + 1$ $11 = 2(5) + 1$ $13 = 2(6) + 1$ $15 = 2(7) + 1$ $17 = 2(8) + 1$	$39 = 4(9) + (2(0) + 3)\ mod\ 2(9)$ $41 = 4(9) + (2(1) + 3)\ mod\ 2(9)$ $43 = 4(9) + (2(2) + 3)\ mod\ 2(9)$ $45 = 4(9) + (2(3) + 3)\ mod\ 2(9)$ $47 = 4(9) + (2(4) + 3)\ mod\ 2(9)$ $49 = 4(9) + (2(5) + 3)\ mod\ 2(9)$ $51 = 4(9) + (2(6) + 3)\ mod\ 2(9)$ $53 = 4(9) + (2(7) + 3)\ mod\ 2(9)$ $37 = 4(9) + (2(8) + 3)\ mod\ 2(9)$
11	0 1 2 3 4 5	$1 = 2(0) + 1$ $3 = 2(1) + 1$ $5 = 2(2) + 1 \quad 7 =$ $2(3) + 1 \quad 9 =$ $2(4) + 1$ $11 = 2(5) + 1$	$47 = 4(11) + (2(0) + 3)\ mod\ 2(11)$ $49 = 4(11) + (2(1) + 3)\ mod\ 2(11)$ $51 = 4(11) + (2(2) + 3)\ mod\ 2(11)$ $53 = 4(11) + (2(3) + 3)\ mod\ 2(11)$ $55 = 4(11) + (2(4) + 3)\ mod\ 2(11)$ $57 = 4(11) + (2(5) + 3)\ mod\ 2(11)$

	6 7 8 9 10	$13 = 2(6) + 1$ $15 = 2(7) + 1$ $17 = 2(8) + 1$ $19 = 2(9) + 1$ $21 = 2(10) + 1$	$59 = 4(11) + (2(6) + 3)\ mod\ 2(11)$ $61 = 4(11) + (2(7) + 3)\ mod\ 2(11)$ $63 = 4(11) + (2(8) + 3)\ mod\ 2(11)$ $65 = 4(11) + (2(9) + 3)\ mod\ 2(11)$ $45 = 4(11) + (2(10) + 3)\ mod\ 2(11)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	i	$2i + 1$	$4n + (2i + 3) mod\ 2n$

Keterangan:

$n =$ bilangan tak negatif dari notasi $GP_{n,1}$.

$i =$ indeks pada graf Petersen diperumum dimulai dari 0 sampai dengan $n - 1$.

Berdasarkan tabel 3.3 diperoleh rumus umum label titik adalah:

(i) $f(u_i) = 2i + 1$, $i = 0,1,2,3, \cdots, n - 1$

(ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 3) mod\ 2n$, $i = 0,1,2,3, \cdots, n - 1$

Selanjutya, dengan menggunakan aturan rumus umum label titik untuk $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 2q - 1\}$ diperoleh tabel pola label sisi sebagai berikut:

Tabel 3.4 Polal pelabelan sisi graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$

n	i	$f(u_iu_{i+1})$	$f(v_iv_{i+1})$	$f(u_iv_i)$
3	0 2 3	$4 = 4(0) + 4$ $8 = 4(1) + 4$ $6 = 2(2) + 2$	$14 = 2(3) + 4(0) + 8$ $12 = 3(3) + 1 + 2$ $10 = 2(3) + 4$	$16 = 4(3) + 4(0) + 4$ 2 0
5	0 1 2 3 4	$4 = 4(0) + 4$ $8 = 4(1) + 4$ $12 = 4(2) + 4$ $16 = 4(3) + 4$ $10 = 2(4) + 2$	$18 = 2(5) + 4(0) +$ $22 = 2(5) + 4(1) +$ $26 = 2(5) + 4(2) + 8$ $20 = 3(5) + 3 + 2$ $14 = 2(5) + 4$	$24 = 4(5) + 4(0) + 4$ $28 = 4(5) + 4(1) + 4$ 2 $6 = 4(3) - 2(5) + 4$ 0
7	0 1 2 3 4 5 6	$4 = 4(0) + 4$ $8 = 4(1) + 4$ $12 = 4(2) + 4$ $16 = 4(3) + 4$ $18 = 4(4) + 4$ $24 = 4(5) + 4$ $14 = 2(6) + 2$	$22 = 2(7) + 4(0) + 8$ $26 = 2(7) + 4(1) + 8$ $30 = 2(7) + 4(2) + 8$ $34 = 2(7) + 4(3) + 8$ $38 = 2(7) + 4(4) + 8$ $28 = 3(7) + 5 + 2$ $18 = 2(7) + 4$	$32 = 4(7) + 4(0) + 4$ $36 = 4(7) + 4(1) + 4$ $40 = 4(7) + 4(2) + 4$ 2 $6 = 4(4) - 2(7) + 4$ $10 = 4(5) - 2(7) + 4$ 0
9	0 1 2	$4 = 4(0) + 4$ $8 = 4(1) + 4$ $12 = 4(2) + 4$	$26 = 2(9) + 4(0) + 8$ $30 = 2(9) + 4(1) + 8$ $34 = 2(9) + 4(2) + 8$	$40 = 4(9) + 4(0) + 4$ $44 = 4(9) + 4(1) + 4$ $48 = 4(9) + 4(2) + 4$

	3 4 5 6 7 8	$16 = 4(3) + 4$ $20 = 4(4) + 4$ $24 = 4(5) + 4$ $28 = 4(6) + 4$ $14 = 4(7) + 4$ $18 = 2(8) + 2$	$38 = 2(9) + 4(3) + 8$ $42 = 2(9) + 4(4) + 8$ $46 = 2(9) + 4(5) + 8$ $50 = 2(9) + 4(6) + 8$ $36 = 3(9) + 7 + 2$ $22 = 2(9) + 4$	$52 = 4(9) + 4(3) + 4$ 2 $6 = 4(5) - 2(9) + 4$ $10 = 4(6) - 2(9) + 4$ $14 = 4(7) - 2(9) + 4$ 0
11	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	$4 = 4(0) + 4$ $8 = 4(1) + 4$ $12 = 4(2) + 4$ $16 = 4(3) + 4$ $20 = 4(4) + 4$ $24 = 4(5) + 4$ $28 = 4(6) + 4$ $32 = 4(7) + 4$ $36 = 4(8) + 4$ $40 = 4(9) + 4$ $22 = 2(10) + 2$	$30 = 2(11) + 4(0) + 8$ $34 = 2(11) + 4(1) + 8$ $38 = 2(11) + 4(2) + 8$ $42 = 2(11) + 4(3) + 8$ $46 = 2(11) + 4(4) + 8$ $50 = 2(11) + 4(5) + 8$ $54 = 2(11) + 4(6) + 8$ $58 = 2(11) + 4(7) + 8$ $62 = 2(11) + 4(8) + 8$ $44 = 3(11) + 9 + 2$ $26 = 2(11) + 4$	$48 = 4(11) + 4(0) + 4$ $52 = 4(11) + 4(1) + 4$ $56 = 4(11) + 4(2) + 4$ $60 = 4(11) + 4(3) + 4$ $64 = 4(11) + 4(4) + 4$ 2 $6 = 4(6) - 2(11) + 4$ $10 = 4(7) - 2(11) + 4$ $14 = 4(8) - 2(11) + 4$ $18 = 4(9) - 2(11) + 4$ 0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	0 $\cdots$ $\frac{n-3}{2}$ $\frac{n-1}{2}$ $\frac{n+1}{2}$ $\cdots$ $n-3$ $n-2$ $n-1$	$\vdots$ $4i + 4$ $\vdots$ $2i + 2$	$\vdots$ $2n + 4i + 8$ $\vdots$ $3n + i + 2$ $2n + 4$	$\vdots$ $4n + 4i + 4$ $\vdots$ 2 $\vdots$ $4i - 2n + 4$ $\vdots$ 0

Keterangan:

$n =$ bilangan tak negatif dari notasi $GP_{n,1}$.

$i =$ indeks pada graf Petersen diperumum dimulai dari 0 sampai dengan $n - 1$.

Berdasarkan tabel 3.4 diperoleh rumus umum label sisi adalah:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 2 & ,\ 0 \le i \le n-2 \\ 2i & ,\ i = n-1 \end{cases}$

(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 6 & ,\ 0 \le i \le n-3 \\ 4i + 6 & ,\ i = n-2 \\ 2i + 4 & ,\ i = n-1 \end{cases}$

$$\text{(iii) } f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 2 & , \ 0 \le i \le \frac{n-3}{2} \\ 0 & , \ i = \frac{n-1}{2} \\ 4i - 2n + 2 & , \ \frac{n+1}{2} \le i \le n-2 \\ 6i + 4 & , \ i = n-1 \end{cases}$$

3.3 Pembelajaran Bagi Orang Berilmu

Allah telah berfirman dalam Al-Qur’an surah al-Qamar surat ke-54 ayat 15 berikut:

“*Dan sungguh kami telah meninggalkannya sebagai bukti, maka adakah yang ingin mengambil pelajaran?*.”

Dalam Tafsir Al-Misbah dikatakan, ayat tersebut menjelaskan tentang kesudahan perahu Nabi Nuh As. sekaligus pelajaran yang dapat diambil dari peristiwa tersebut. Allah berfirman: Dan Kami bersumpah bahwa sungguh Kami telah meninggalkannya yakni membiarkan sisa-sisa perahu itu terus eksis atau menjadikan peristiwa itu terus dikenang, tidak hilang dari ingatan. Itu Kami lakukan sebagai bukti yang sangat jelas tentang kuasa Kami sekaligus pelajaran yang berharga, maka adakah orang ingin bersungguh-sungguh mengambil pelajaran dari peristiwa itu sehingga menghindari pembangkangan kepada Allah dan Rasul-Nya?.

Ayat tersebut menunjukkan bahwa terdapat pembelajaran dibalik kisahnya Nabi Nuh As. dan kaumnya. Allah telah meninggalkan bukti berupa masih adanya sisa-sisa perahu Nabi Nuh ketika azab Allah bagi kaum Nabi Nuh yang membangkang dan tidak taat berupa banjir bandang yang dahsyat. Dan Allah menghendaki keselamatan bagi Nabi Nuh dan kaumnya yang taat. Maka, dari kisah tersebut terdapat pembelajaran bagi kaum yang berpikir untuk terus melakukan kebaikan sesuai tuntunan Allah dan Rasul-Nya. Kisah atau peristiwa tersebut dalam matematika disebut sebagai kasus. Sehingga setelah adanya suatu bukti maka dapat diambil suatu kesimpulan yang memiliki manfaat bagi orang-orang yang berilmu. Sehingga manfaat tersebut terus dikembangkan dan memberikan manfaat lain dalam bidang-bidang yang lain. Hal tersebut selaras dengan pelabelan harmonis genap sejati yang tidak lepas dari kajian tentang pelabelan harmonis yang dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang keilmuan lain seperti bidang teori koding dalam masalah *error-correcting code* dan jaringan komunikasi pada pembagian saluran radio. Dengan demikian, jadilah orang yang berilmu yang terus belajar dan mengambil manfaat dari pembelajaran yang kita tekuni.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah graf harmonis genap sejati karena dapat dilabeli dengan aturan pelabelan harmonis genap sejati.
2. Pelabelan harmonis genap sejati pada graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ mempunyai rumus umum sebagai berikut:

   a.) Untuk $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{0, 2, 4, 6, \cdots, 6n - 2\}$,

   rumus umum label titik adalah:

   (i) $f(u_i) = 2i \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n-1$

   (ii) $f(v_i) = 4n + (2i + 2) mod\ 2n \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n-1$

   dan rumus umum label sisi adalah:

   (i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i + 2 & , \ 0 \leq i \leq n-2 \\ 2i & , \ i = n-1 \end{cases}$

   (ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 4i + 6 & , \ 0 \leq i \leq n-3 \\ 4i + 6 & , \ i = n-2 \\ 2i + 4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

   (iii) $f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n + 4i + 2 & , \ 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2} \\ 0 & , \ i = \frac{n-1}{2} \\ 4i - 2n + 2 & , \ \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-2 \\ 6i + 4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

   b.) Untuk $f : V(GP_{n,1}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \cdots, 6n - 1\}$,

   rumus umum label titik adalah:

   c.) $f(u_i) = 2i + 1 \qquad , i = 0,1,2,3, \cdots, n-1$

d.) $f(v_i) = 4n + (2i+3) mod\ 2n \quad , i = 0,1,2,3,\cdots,n-1$

dan rumus umum label sisi adalah:

(i) $f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 4i+4 & , \ 0 \le i \le n-2 \\ 2i+2 & , \ i = n-1 \end{cases}$

(ii) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n+4i+8 & , \ 0 \le i \le n-3 \\ 3n+i+2 & , \ i = n-2 \\ 2n+4 & , \ i = n-1 \end{cases}$

(iii) $f(u_i v_i) = \begin{cases} 4n+4i+4 & , \ 0 \le i \le \frac{n-3}{2} \\ 2 & , \ i = \frac{n-1}{2} \\ 4i-2n+4 & , \ \frac{n+1}{2} \le i \le n-2 \\ 0 & , \ i = n-1 \end{cases}$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan harmonis genap sejati ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian sejenis pada graf Petersen diperumum yang lain atau jenis graf yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai MengajarMatematika.* Malang:UIN Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf.* Malang: UIN-Malang Press.

Amir, Mohammad Faizal, Bayu Hari Prasojo. 2016. *Buku Ajar: Matematika Dasar*. Sidoarjo: Umsida Press.

Asmiati. 2016. *Graf dan Aplikasinya pada Jarak Terpendek.* Yogyakarta: Matematika.

Bartle, R. G. 2010. *Introduction to Real Analysis-4th*. Urbana: Illinois.

Capobianco, M. dan Molluzzo, J.C., 1978, *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, Elsavier North-Holland, Inc., New York.

Chartand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth, Inc.

Danarto, Imam. 2012. *Sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian pada Graf Petersen Diperumum* ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$). Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malng.

Fraleigh JB. 1997. A First Course in Abstract Algebra. United States of America (US). Addison-Wesley Publishing Company.

Gallian JA. Stewart D. 2015. Properly even harmonious labelings of disconnected graphs, AKCE J. Graph Combin 12:193-203.doi:10.1016/j.akcej.11.015.

Graham, R.L., & Sloan, N.J. (1980). *On Additive Bases and Harmonius Graphs.* SIAM. Alg. Discrete Meth.

Holton, D.A. dan Sheehan, J.. 1993. *The Petersen Graphs.* Cambridge: Cambridge University Press.

Miller, Mirka. 200. *Open Problems in Graph Theory: Labelings and External Graphs.* Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.

Nudin, Baskoro E.T dan Salman A.N.M.. 2006. *Total Edge Irreguler Strength of Lintang Graphs.* Departmen matematika, FMIPA-ITB S4G-06.

Oberste-Vorth RW, Lawrence BA, Mouzakitis A. 2012. Bridge to Abstract Mathematics. Washington (US): Mathematical Assoc of America.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang. IKIP Malang.

Potanka, Karen. S. 1998. *Groups, Graphs, and Symmetry-Breaking*. Blacksburg,Virginia: Thesis submittedto the Faculty of the Virginia Polythecnic Institue and State University.

Shihab, Muhammad Quraish, *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian al-Qur'an*, Jakarta, Lentera Hati 2002.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Kalis Setiono, lahir di Blora pada tanggal 2 Mei 1999. Seorang putra pertama dari pasangan Bapak Lasiman (Alm) dan Ibu Sukarti. Ia juga mempunyai seorang adik perempuan satu-satunya yang bernama Devita Putri Salamah.

Laki-laki yang mempunyai panggilan akrab Kalis ini menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita Kemiri dan lulus pada tahun 2005, lalu pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 2 Kemiri dan lulus pada tahun 2011, setelah itu melanjutkan ke SMPN 1 Jepon dan lulus pada tahun 2014. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMAN 1 Blora pada tahun 2017. Selanjutnya, pada tahun 2017 Kalis menempuh ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika.

Sejak di sekolah menengah sampai perguruan tinggi, Kalis selalu mengikuti organisasi baik intra maupun ekstra sekolah. Ia pernah menjadi ketua OSIS SMPN 1 Jepon periode 2012/2013, Pratama Penggalang Garuda SMPN 1 Jepon periode 2012/2013, Ketua Umum Himpunan Pengajian Remaja Islam Blora (HIMPARISBA) periode 2015/2016, CO (Coordinator Organization) Divisi Kematematikaan Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) “INTEGRAL” Matematika periode 2018/2019, Leader Mathematics English Club (MEC) tahun 2020. Selain itu, di sela-sela kesibukan menjadi mahasiswa Kalis juga pernah menjadi asisten laboratorium selama dua semester dan pernah menjadi delegasi untuk mengikuti *event* Indonesian Youth Dream Camp 2017 (IYDC 2017) di Yogyakarta.

KEMENTERIAN AGAMA RI UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANGFAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI

Nama	: Muhammad Kalis Setiono
NIM	: 17610104
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	: Pelabelan Harmonis Genap Sejati pada Graf Petersen Diperumum
Pembimbing I	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
Pembimbing II	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	9 Maret 2021	Konsultasi Bab I, II, III	1.	
2.	11 Maret 2021	Revisi Bab I, II, III		2.
3.	12 Maret 2021	Konsultasi Agama Bab I,II	3.	
4.	19 Maret 2021	Konsultasi Lanjut Bab I, II, II		4.
5.	25 Maret 2021	Revisi Agama Bab I,II	5	
6.	25 Maret 2021	ACC untuk Seminar Proposal		6
7.	6 Mei 2021	Konsultasi Bab III,IV	7.	
8.	6 Mei 2021	Konsultasi Agama Bab I,II,III		8.
9.	7 Mei 2021	ACC untuk Sidang Skripsi	9.	
10.	28 Mei 2021	Konsultasi Pra Sidang		10.

Malang, 23 Juni 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001